

**Квантовая механика квазичастиц в вихрях
Абрикосова как пример приложения
методов квазиклассической теории
сверхпроводимости**

А.С.Мельников

*Отдел сверхпроводимости Института Физики Микроструктур РАН,
Нижний Новгород*



Лаборатория теории мезоскопических систем

*А.С.Мельников, Водолазов Д.Ю., Самохвалов А.В., И.Д.Токман,
А.Ю.Аладышкин, С.В.Шаров, Д.Савинов, И.Шерешевский*

*Аспиранты: А.Зотова, А.Путилов, В.Вадимов, А.Копасов,
П.Марычев, А.Ромашкин*

Алumni: М.Силаев, И.Хаймович, С.В.Миронов, А.Беспалов

План

- ◆ *Квазиклассические уравнения теории сверхпроводимости.*
- ◆ *Почему так важны квазичастичные состояния в вихрях Абрикосова?*
- ◆ *Связанные состояния квазичастиц в корях вихрей*
- ◆ *Баллистический и диффузный пределы.*
- ◆ *Туннелирование квазичастиц между вихрями.*
- ◆ *некоторые вопросы и трудности...*

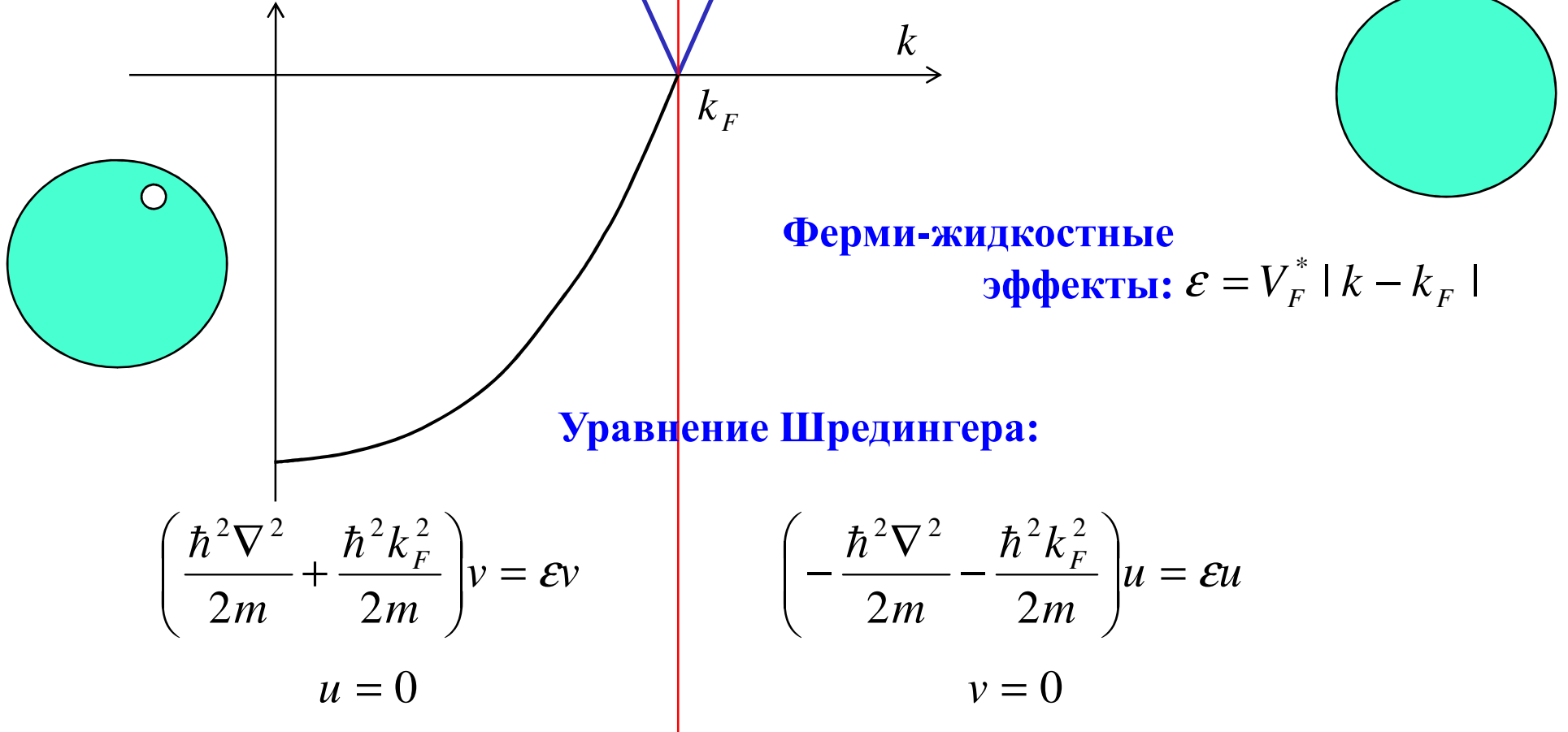
Электроны и дырки в нормальном металле

Дырки

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \approx V_F (k_F - k)$$

Электроны

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \approx V_F (k - k_F)$$



Электроны и дырки в нормальном металле

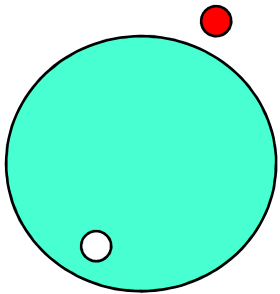
$$\langle 0 | \hat{a}_q \hat{a}_k^+ | 0 \rangle \neq 0$$

- вероятность рассеяния электрона из состояния $|\hat{a}_k^+ | 0 \rangle$ в состояние $|\hat{a}_q^+ | 0 \rangle$

Электроны и дырки в сверхпроводнике.

Аномальные средние.

$$\langle 0 | \hat{a}_q^+ \hat{a}_k^+ | 0 \rangle \neq 0 \quad - \text{вероятность рассеяния электрона из состояния } |\hat{a}_k^+ | 0 \rangle \\ \text{в дырочное состояние } |\hat{a}_q | 0 \rangle$$



2 связанных уравнения Шредингера = уравнения Боголюбова

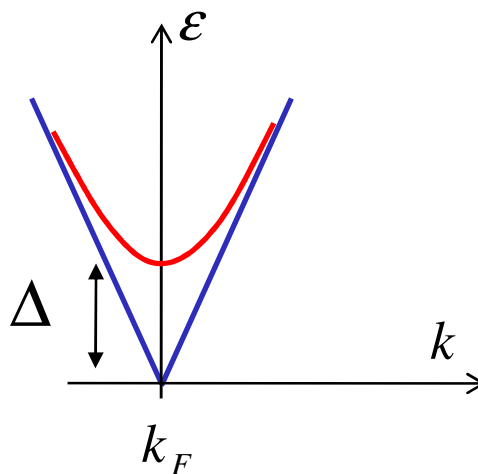
$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \right) u + \Delta v = \epsilon u$$
$$\left(\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \right) v + \Delta u = \epsilon v$$

Однородное сверхпроводящее состояние:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} e^{i\vec{k}\vec{r}}$$


$$\varepsilon = \pm \sqrt{\Delta^2 + (\hbar V_F (k - k_F))^2}$$

Сверхпроводящая щель



Кое-какие «мелочи»:

*магнитное поле, фаза параметра порядка,
калибровочная инвариантность, потенциальное
рассеяние на неоднородностях, границах, спин*


$$\left(\frac{\hbar^2 \left(\nabla - \frac{ie}{\hbar c} \vec{A} \right)^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} + U \right) u + \Delta v = (\varepsilon \pm \beta H) u$$
$$\left(\frac{\hbar^2 \left(\nabla + \frac{ie}{\hbar c} \vec{A} \right)^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} - U \right) v + \Delta^* u = (\varepsilon \pm \beta H) v$$

*Еще кое-какие «мелочи»:
Что такое оператор дельта?*

*Ответ 1: дельта – это именно тот параметр
порядка, который появляется в теории типа
Гинзбурга-Ландау*

*Ответ 2: дельта – это самосогласованное поле
куперовских пар*

*Ответ 3: дельта – это вообще-то нелокальный
оператор*

$$\hat{\Delta}u = \int \Delta(\vec{r}_1, \vec{r}_2)u(\vec{r}_2)d\vec{r}_2$$

Функции Грина. Уравнения Горькова.

$$G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{\lambda} \frac{u_{\lambda}(\vec{r}_1)u_{\lambda}^*(\vec{r}_2)}{\varepsilon - \varepsilon_{\lambda}}$$

$$F(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{\lambda} \frac{v_{\lambda}(\vec{r}_1)u_{\lambda}^*(\vec{r}_2)}{\varepsilon - \varepsilon_{\lambda}}$$

$$\left(\hat{H}_0 - \mu - \varepsilon\right)G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) + \Delta(\vec{r}_1)F(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$\left(\mu - \hat{H}_0^* - \varepsilon\right)F(\vec{r}_1, \vec{r}_2) + \Delta^*(\vec{r}_1)G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0$$

Как устроено квазиклассическое приближение в сверхпроводниках ?

$$\left(-\frac{\hbar^2 \left(\nabla - \frac{ie}{\hbar c} \vec{A} \right)^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} + U \right) u + \Delta v = (\varepsilon \pm \beta H) u$$

$$\left(\frac{\hbar^2 \left(\nabla + \frac{ie}{\hbar c} \vec{A} \right)^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} - U \right) v + \Delta^* u = (\varepsilon \pm \beta H) v$$

*Масштаб неоднородности
сверхпроводящей щели*

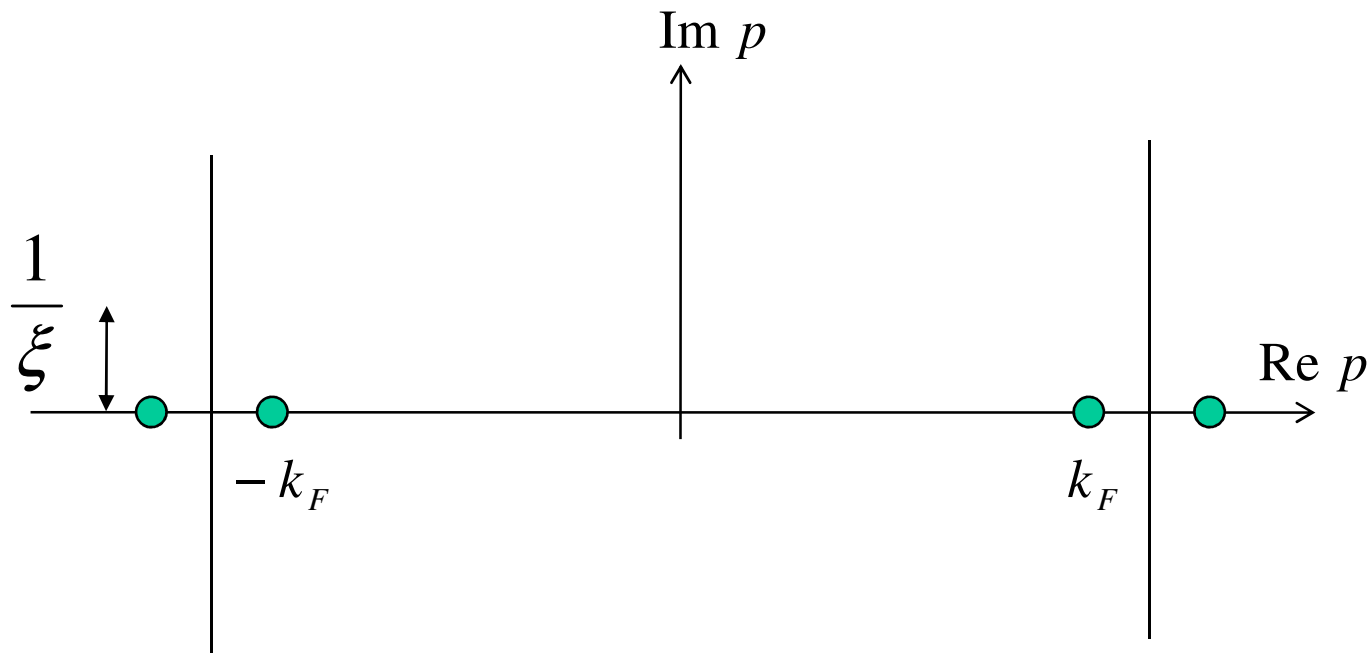
$$\xi = \frac{\hbar V_F}{\Delta}$$

$$\hat{\Psi} = (u, v) = \hat{\psi} e^{iS}$$

$$|\nabla S| = k_F \gg \frac{1}{\xi}$$

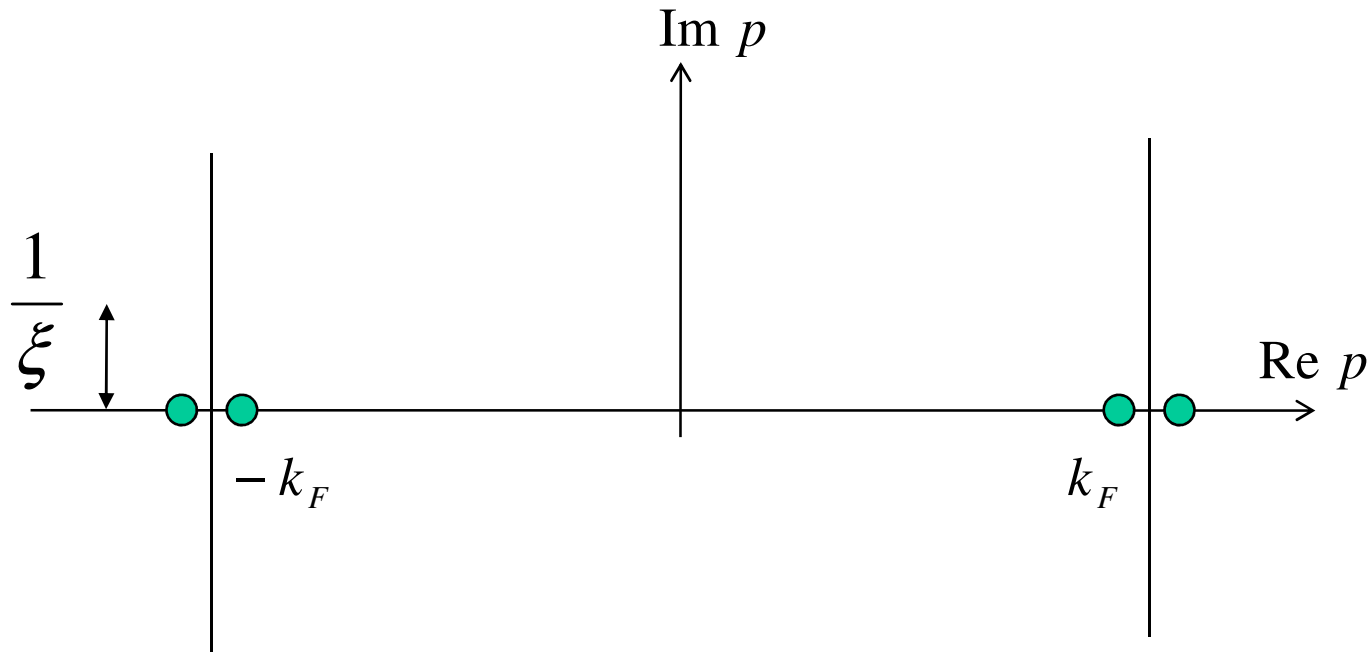
Особенности квазиклассического приближения в уравнениях Боголюбова.

$$p = S'_x$$



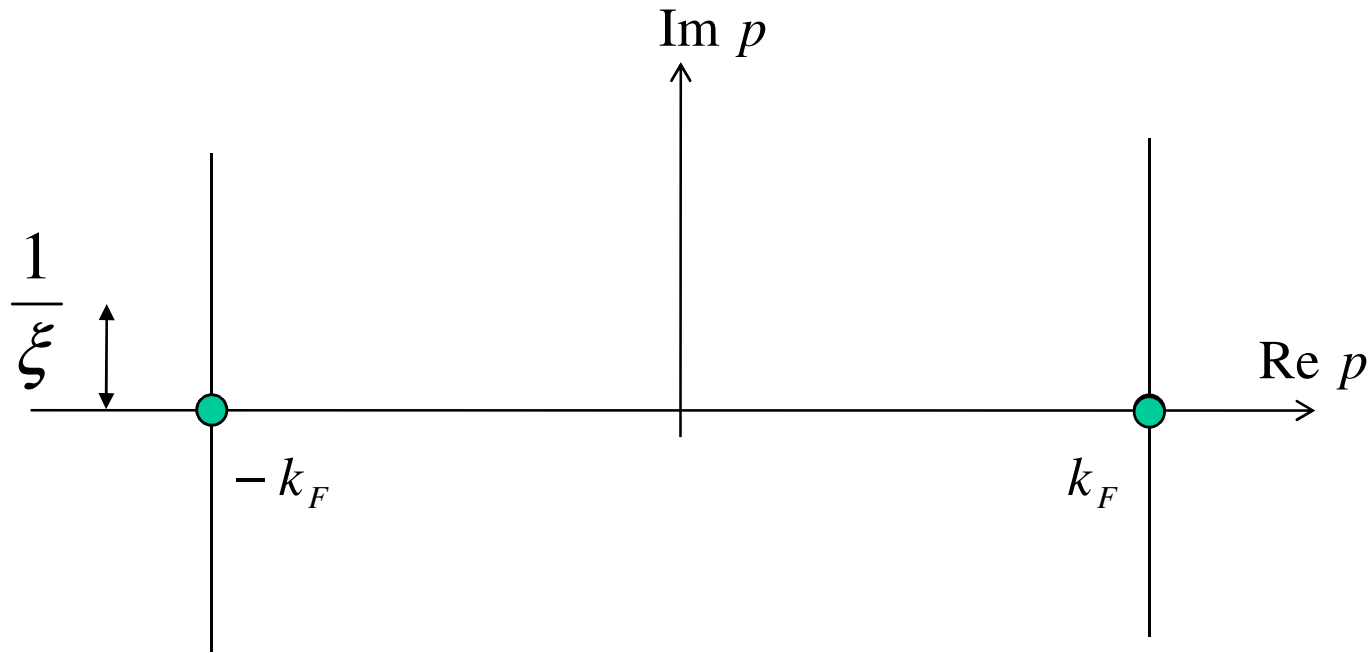
Особенности квазиклассического приближения в уравнениях Боголюбова.

$$p = S'_x$$



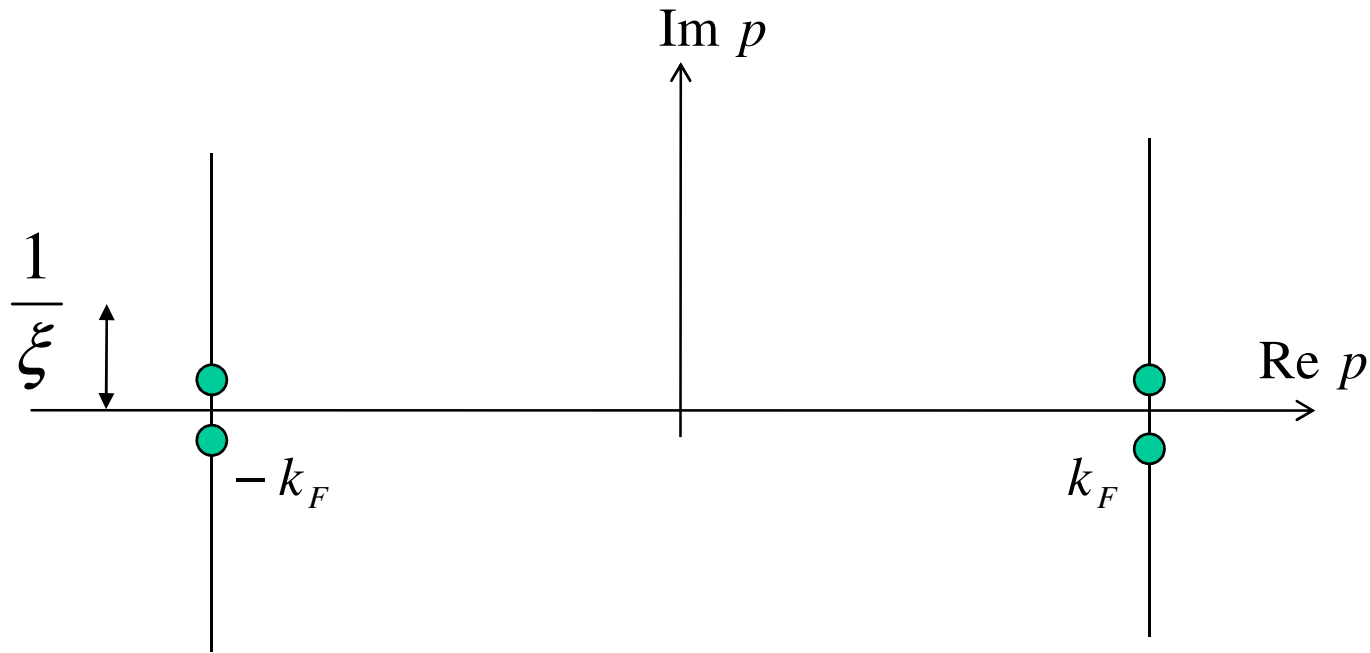
Особенности квазиклассического приближения в уравнениях Боголюбова.

$$p = S'_x$$



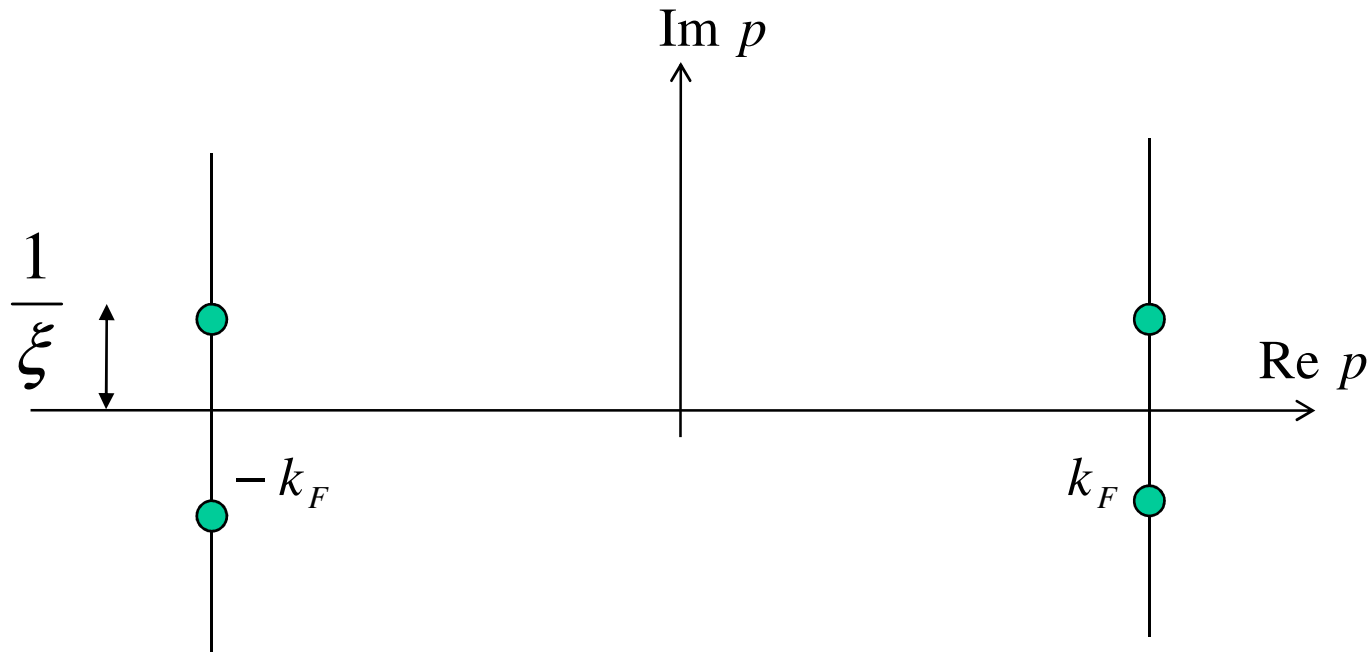
Особенности квазиклассического приближения в уравнениях Боголюбова.

$$p = S'_x$$




Особенности квазиклассического приближения в уравнениях Боголюбова.

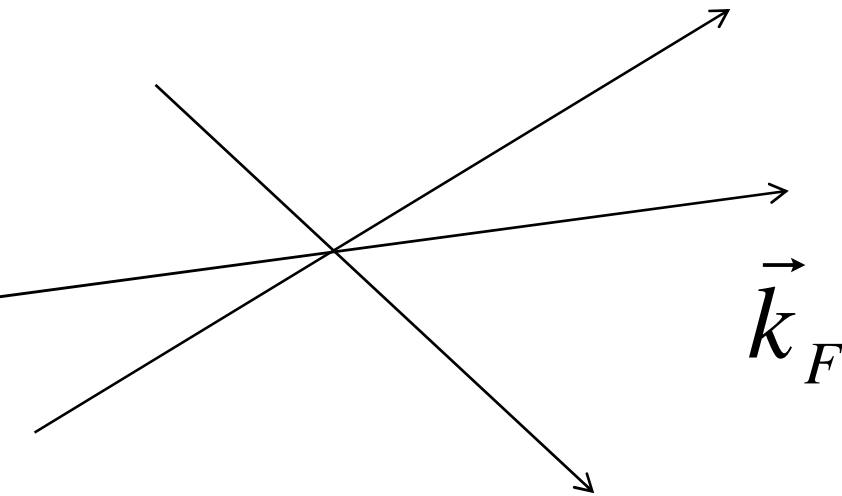
$$p = S'_x$$



Квазиклассическое приближение. Уравнения Андреева.


$$\left(-i\hbar\vec{V}_F\left(\nabla - \frac{ie}{\hbar c}\vec{A}\right) + U \right) u + \Delta v = (\varepsilon \pm \beta H) u$$

$$\left(i\hbar\vec{V}_F\left(\nabla + \frac{ie}{\hbar c}\vec{A}\right) - U \right) v + \Delta^* u = (\varepsilon \pm \beta H) v$$



Недостатки:

**Неучет отклонений траекторий в магнитном поле,
Прецессия траекторий (неточный backscattering при андреевском отражении)**

Quasiclassical approximation

$$\hat{\Psi}(\vec{p}) = \frac{1}{k_{\perp}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(|\vec{p}| - \hbar k_{\perp})s/\hbar} \hat{\psi}(s, \theta_p) ds$$

$$k_{\perp} = \sqrt{k_F^2 - k_z^2}$$

$$\hat{\Psi} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{e^{ik_z z}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik_{\perp} r \cos(\theta_p - \theta)} \hat{\psi}(r \cos(\theta_p - \theta), \theta_p) d\theta_p$$

$$b = \mu/k_{\perp}$$

$$\hat{\psi} = e^{i\mu\theta_p + i\hat{\sigma}_z \theta_p / 2} \hat{f}(s)$$

$$\vec{k}_{\perp} = k_{\perp} (\cos \theta_p, \sin \theta_p)$$

$$\Delta = \Delta_0 \delta_v(r) e^{i\theta}$$

$$\hat{H}\hat{f} = E\hat{f}$$

$$\hat{H} = -i\hbar V_{\perp} \hat{\sigma}_z \frac{\partial}{\partial s} + \hat{\sigma}_x \text{Re} \Delta(s) - \hat{\sigma}_y \text{Im} \Delta(s)$$

Квазиклассическое приближение в уравнениях для функций Грина.

$$k_F \gg \frac{1}{\xi}$$

Уравнения Эйленбергера.

Грязный предел.

$$l \ll \xi$$

Уравнения Узаделя.

Теория Эйленбергера

$$-i\hbar\mathbf{v}_F \nabla \check{g} - [\varepsilon\check{\tau}_3 + \Sigma, \check{g}] = 0$$

$$\check{\Sigma}(\mathbf{R}; \mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ -\Sigma_2^+ & -\Sigma_1 \end{pmatrix} \quad \check{g}(\mathbf{R}; \mathbf{n}) = \begin{pmatrix} g & f \\ -f^+ & \bar{g} \end{pmatrix}$$

$$g + \bar{g} = 0, \quad g^2 - ff^+ = 1$$

$$\begin{aligned} -i\hbar\mathbf{v}_F \nabla g - \Sigma_2 f^+ - \Sigma_2^+ f &= 0 \\ -i\hbar\mathbf{v}_F \nabla f - 2(\varepsilon + \Sigma_1)f - 2\Sigma_2 g &= 0 \\ i\hbar\mathbf{v}_F \nabla f^+ - 2(\varepsilon + \Sigma_1)f^+ - 2\Sigma_2^+ g &= 0 \end{aligned}$$

Теория Уздела

$$l \ll \xi$$

$$f = \langle f \rangle + \vec{n} \vec{Q}$$

$$-iD\nabla(g\nabla f - f\nabla g) + 2\epsilon f - 2\Delta^* g = 0$$

$$g^2 - ff^+ = 1$$

Квантовая механика электронов и дырок в сверхпроводниках. Некоторые современные направления

- ◆ Квазичастицы в сверхпроводниках с анизотропным спариванием. теплоемкость, теплопроводность, связанные состояния на вихрях и дефектах
- ◆ динамика вихрей в сверхпроводниках

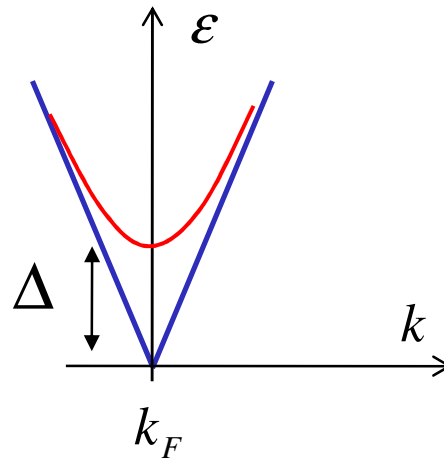
Мезоскопические сверхпроводящие системы

- ◆ квантовый транспорт в гибридных системах с андреевским отражением. Андреевские интерферометры. Интерференционные эффекты в системах с примесями
- ◆ Микротеория джозефсоновских систем. ВАХ. MAR
- ◆ системы сверхпроводник – ферромагнетик

Квантовая механика квазичастиц как тест на тип сверхпроводящего спаривания

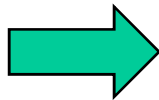
Однородное сверхпроводящее состояние:

Сверхпроводящая щель Δ

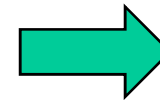


Низкие температуры: в однородном сверхпроводнике с изотропной щелью квазичастиц нет

Неоднородности щели



Изменение спектра квазичастиц

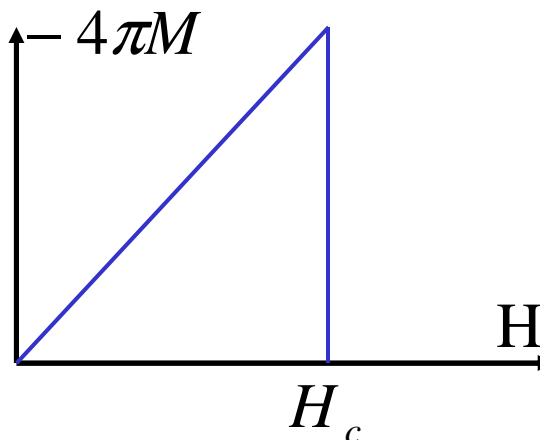
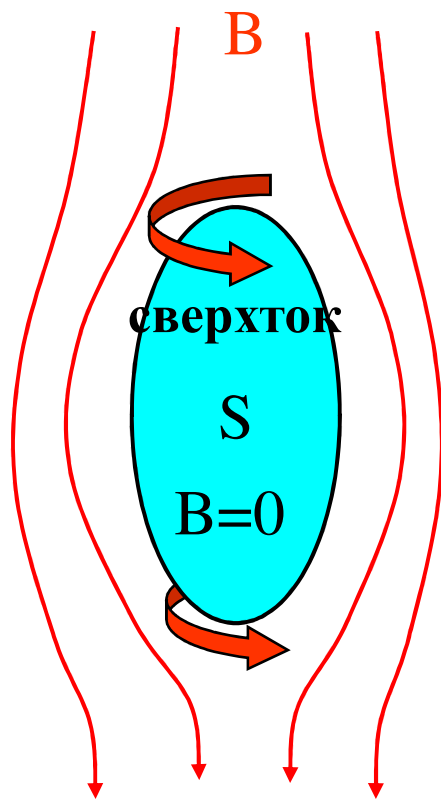


Информация о типе сверхпроводящего спаривания

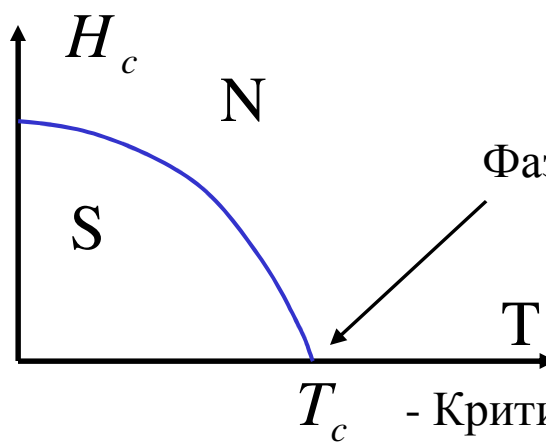
Эксперименты: туннельная спектроскопия, теплопроводность, теплоемкость, поглощение ЭМ волн, спиновая восприимчивость,

Сверхпроводники в магнитном поле.

Эффект
Мейсснера –
Оксенфельда
(1933)



Фазовый переход 1-ого рода

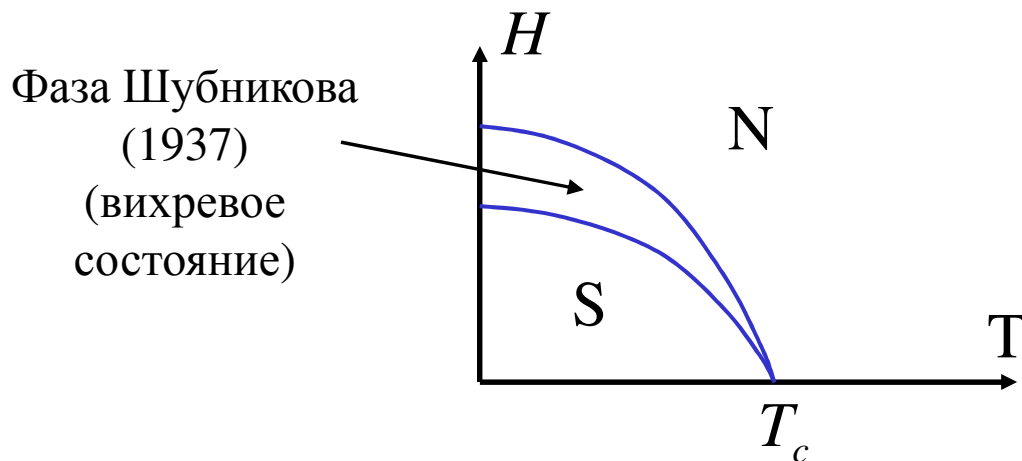
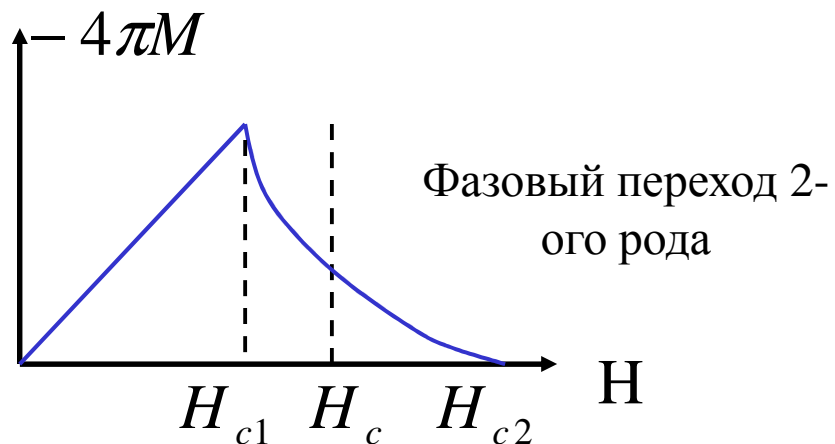


Фазовый переход 2-ого рода

T_c - Критическая температура
сверхпроводящего перехода

Сверхпроводимость I рода.

Сверхпроводимость II рода.



Основная информация о вихрях Абрикосова в сверхпроводниках

◆ Магнитное поле проникает
в сверхпроводник в виде
вихревых линий

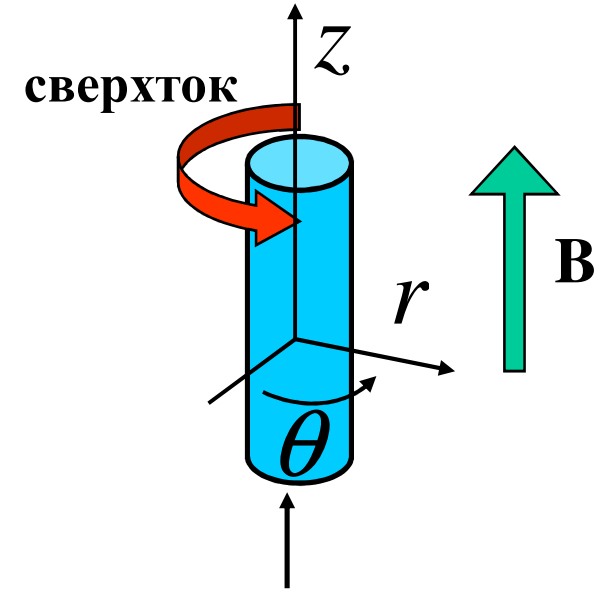
◆ Вихри отталкиваются

◆ Вихрь несет 1 квант
магнитного потока

$$\phi_0 = \frac{\pi \hbar c}{e}$$

◆ Решетка Абрикосова

Вихревая линия



Нормальный кор
(сверхпроводящая щель
подавлена)

$$\Delta = |\Delta(r)| e^{i\theta}$$

Фермионные возбуждения в вихревой фазе сверхпроводников

Почему они важны?

Local DOS

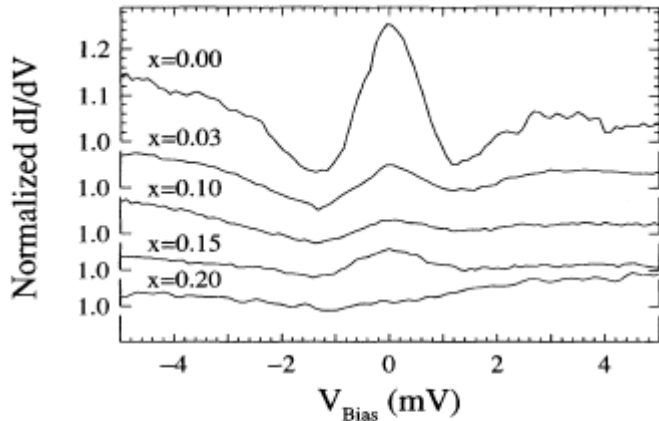
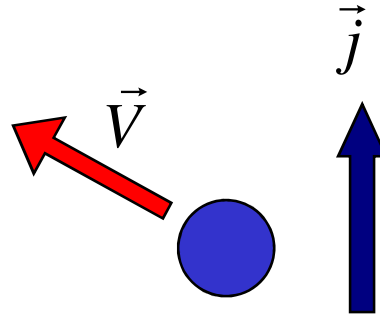


FIG. 3. Spectra taken at the center of a vortex core for various Ta substitutions at 1.3 K and 0.3 T. The spectra are normalized to the differential conductance at high bias.

Ch. Renner et al (1991)

Динамика
вихрей:
Диссипация и
эффект Холла в
вихревой фазе



Thermal transport

Thermal conductivity
along magnetic field:

$$\kappa(B) = n\kappa_v \propto \kappa_n \frac{B}{H_{c2}}$$

Experiment:

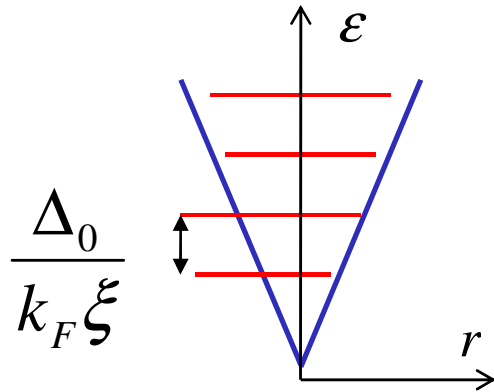
$$\kappa(B) \ll \kappa_n \frac{B}{H_{c2}}$$

Экспериментальные указания на тип сверхпроводящего спаривания

Электронная структура вихревого состояния

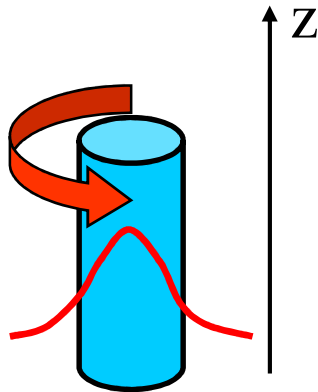
Связанные состояния фермионных возбуждений в коре вихря

Профиль сверхпроводящей щели: потенциальная яма для электронов



Оценка минищели в спектре возбуждений

$$\varepsilon_{\min} \sim \frac{\hbar^2}{m\xi^2} \sim \frac{\hbar^2 \Delta_0}{m\hbar v_F \xi} \sim \frac{\Delta_0}{k_F \xi}$$

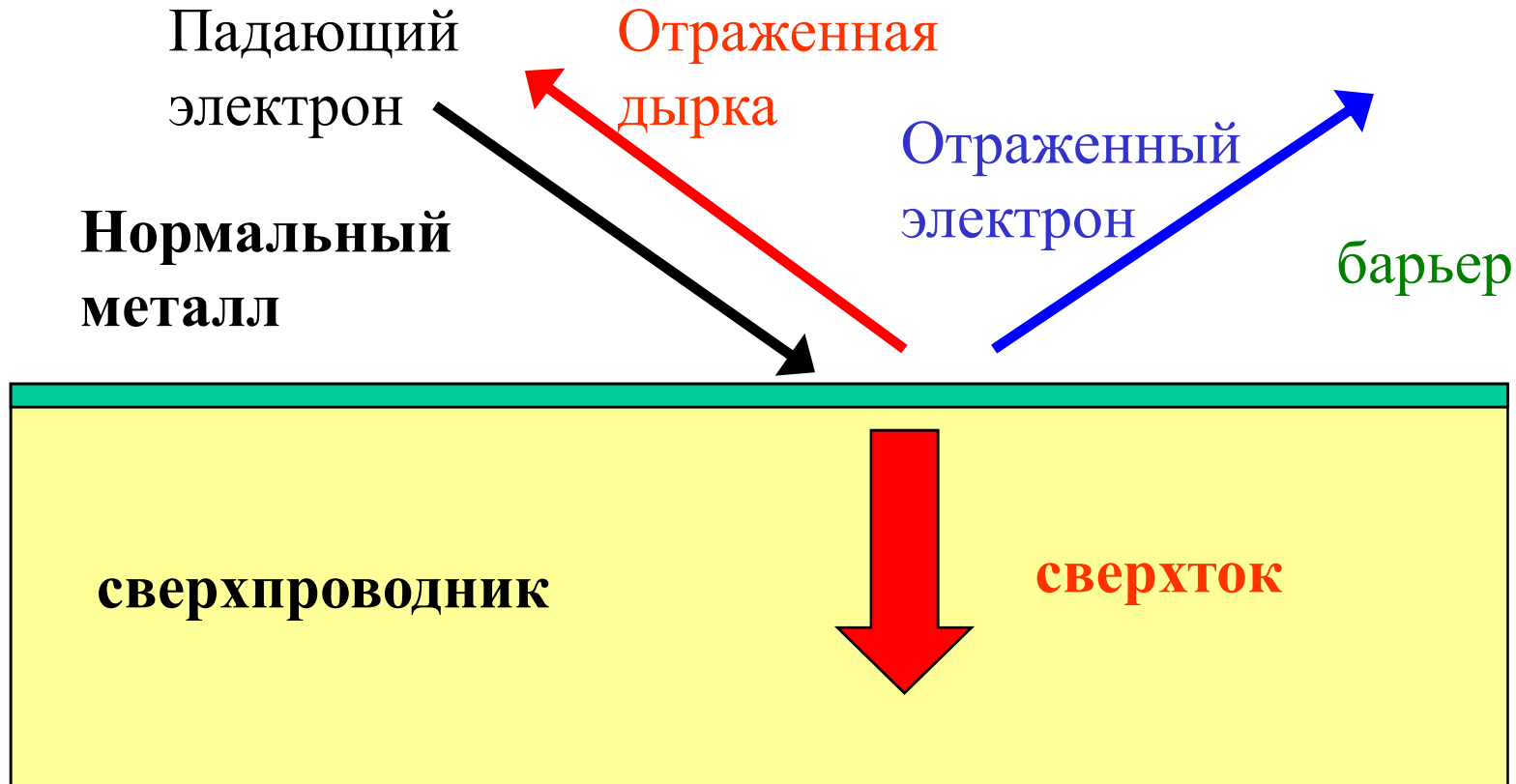


C.Caroli, P.G.de Gennes,
J.Matricon (1964)

$$\varepsilon_{\mu}(k_r) \approx \frac{\mu\Delta}{k_r \xi}$$

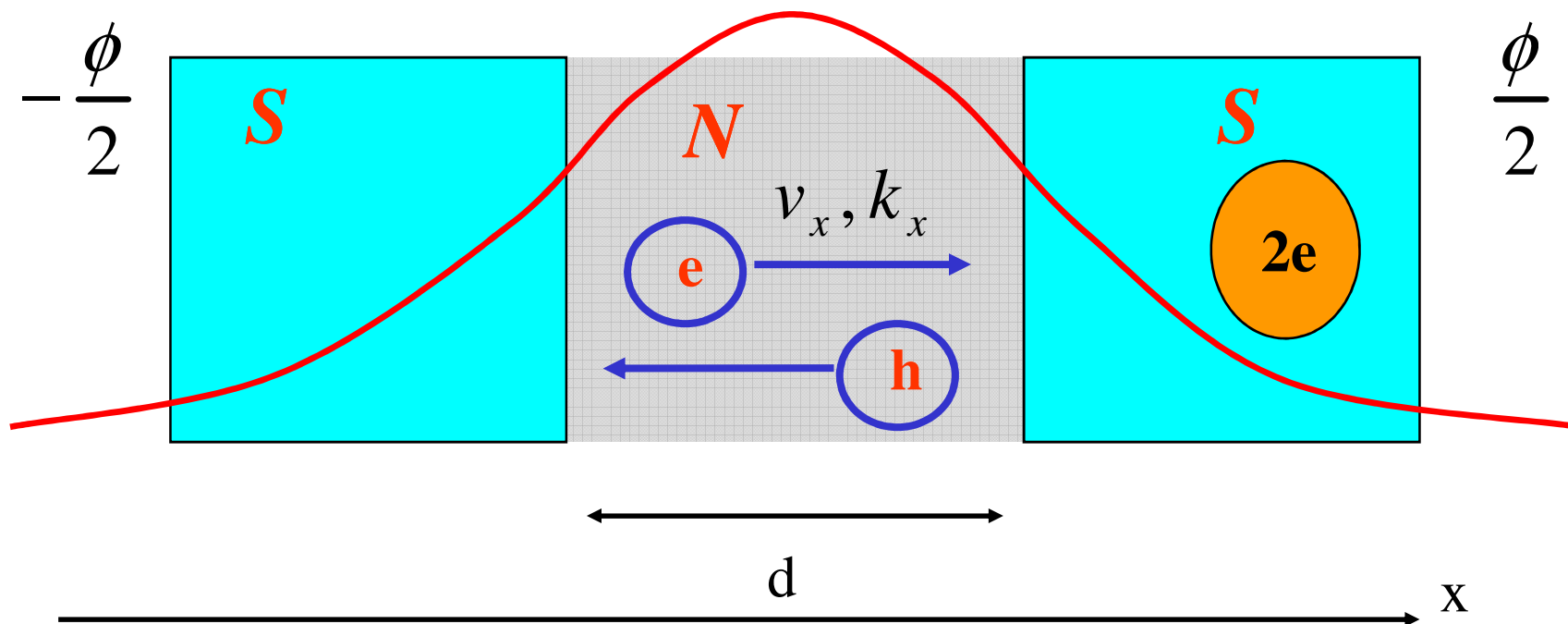
$$k_r = \sqrt{k_F^2 - k_z^2}$$

Андреевское отражение



Транспорт тепла. SNSNS структуры – промежуточное состояние (А.Ф.Андреев)

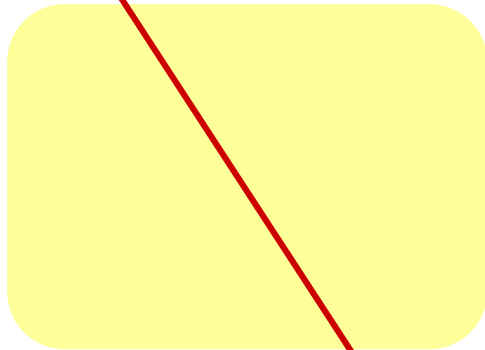
Андреевские связанные состояния



Базовая задача для описания нулевых мод квазичастицы

Разность фаз параметра порядка= π

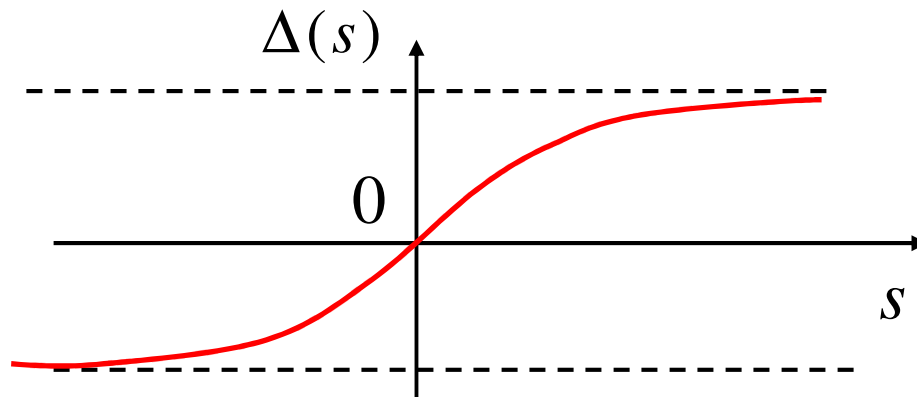
s $\theta = 0$



$\theta = \pi$

$$\hat{H} = -i\hbar V_{\perp} \hat{\sigma}_z \frac{\partial}{\partial s} + \hat{\sigma}_x \text{Re} \Delta(s) - \hat{\sigma}_y \text{Im} \Delta(s, b)$$

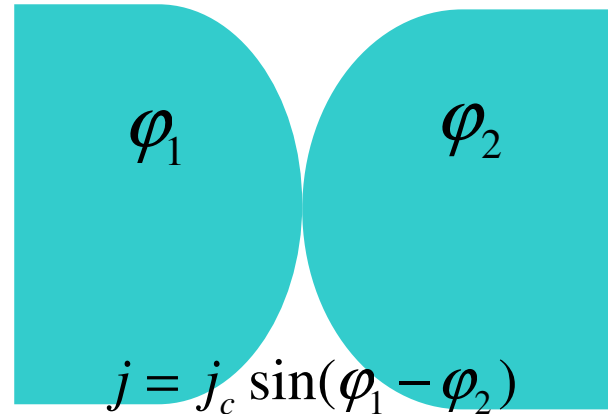
$$\hat{\Psi}_0 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \exp\left(-\frac{1}{\hbar V_{\perp}} \int_0^s \text{Re} \Delta(t) dt\right)$$



энергия=0

Джозефсоновский транспорт. Андреевские уровни в контактах.

Эффект Джозефсона



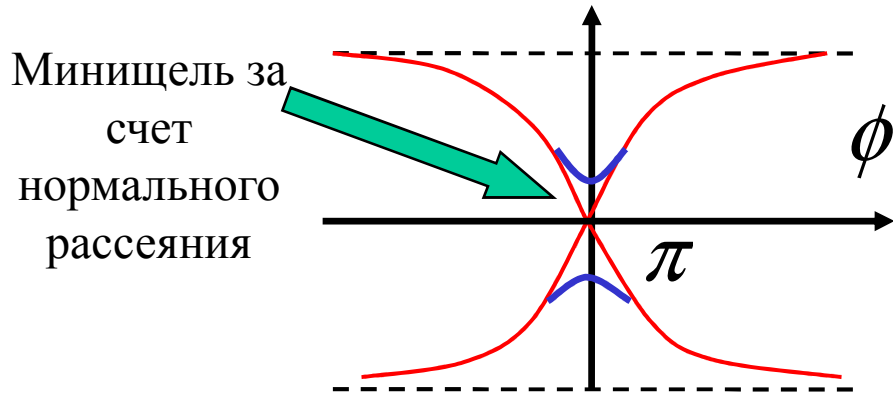
Вклад подщелевых состояний в стационарный сверхток:

$$I^{sg}(\phi) = -\frac{2e}{\hbar} \sum_{\varepsilon_n > 0} \frac{\partial \varepsilon_n(\phi)}{\partial \phi} \tanh \frac{\varepsilon_n(\phi)}{2T}$$

Вопрос: Ток определяется \sin разности фаз?

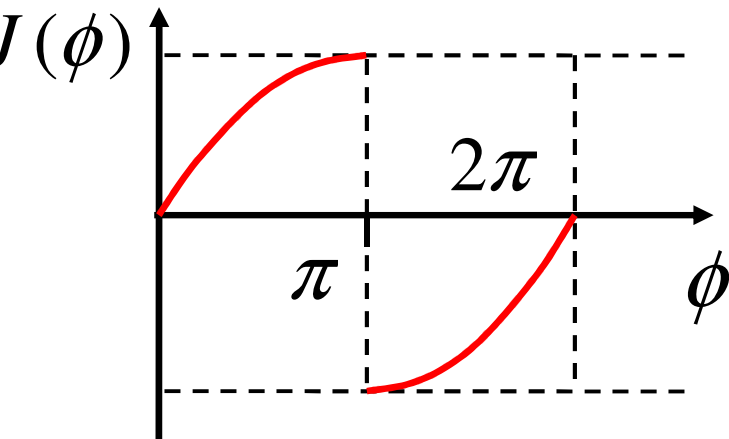
Ответ: только для малой прозрачности границы

Короткий 1-модовый контакт $d \ll \xi$



Спектр локализованных состояний

$$E/\Delta = \pm \cos \frac{\phi}{2}$$



Kulik-Omel'yanchuk 1977
Habercorn et al 1978
Zaitsev 1984
Beenakker 1991
Bagwell 1992
Beenakker-Houten 1991

Длинный 1-модовый контакт. Спектр.

$$d \gg \xi$$

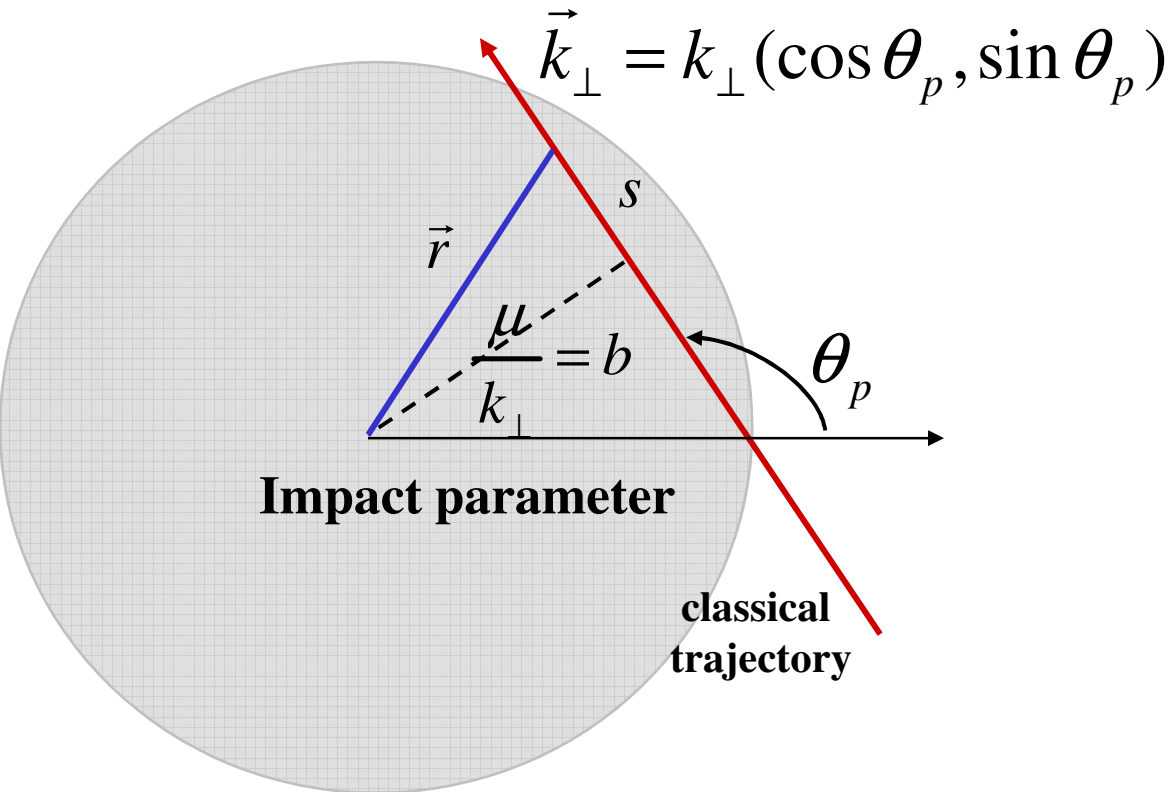
S - N - S

Number of levels $N \sim d\Delta/\hbar v_x$

$$\varepsilon_n(k_r) \approx \frac{(n + 1/2)\pi\hbar v_x}{d}$$

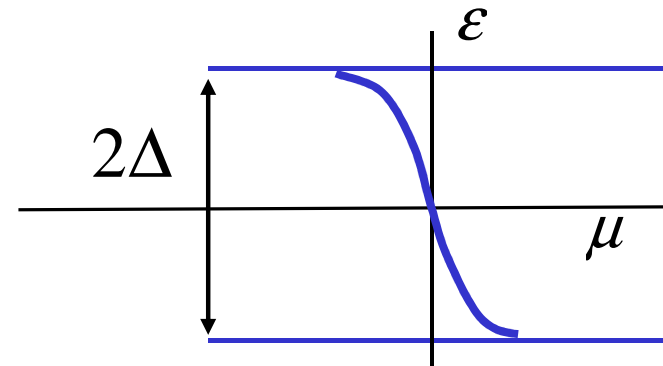
А.Ф.Андреев (1965)

Андреевские уровни квазичастиц в вихрях



$$k_\perp = \sqrt{k_F^2 - k_z^2}$$

Fermi level

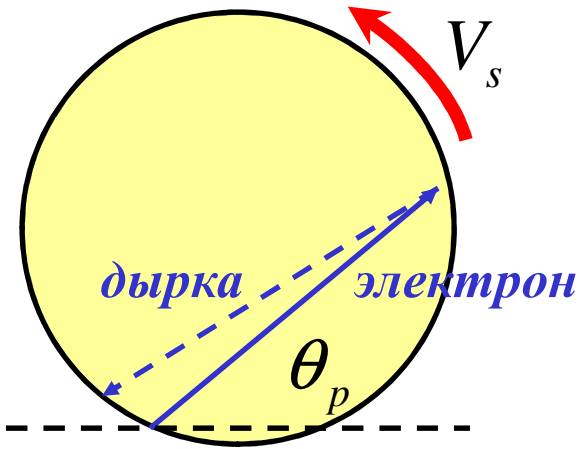


$$\varepsilon_\mu(k_\perp) = -\omega\mu \approx -\frac{\mu\Delta_0}{k_\perp\xi}$$

C. Caroli,
P.G. de Gennes,
J. Matricon
(1964)

Прецессия классической траектории

Отклонение от точного
рассеяния назад при
андреевском отражении в
коре вихря



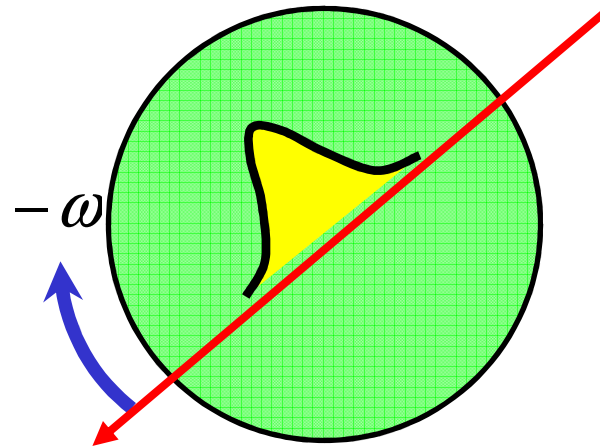
$$\delta\theta_p \sim \frac{V_s}{V_\perp} \quad \delta t \sim \frac{\xi}{V_F}$$

$$\frac{\delta\theta_p}{\delta t} \sim \frac{V_s V_F}{\xi V_\perp} \sim \frac{V_s k_F}{\xi k_\perp} \sim \frac{\Delta_0}{k_\perp \xi \hbar} \sim \frac{\omega}{\hbar}$$



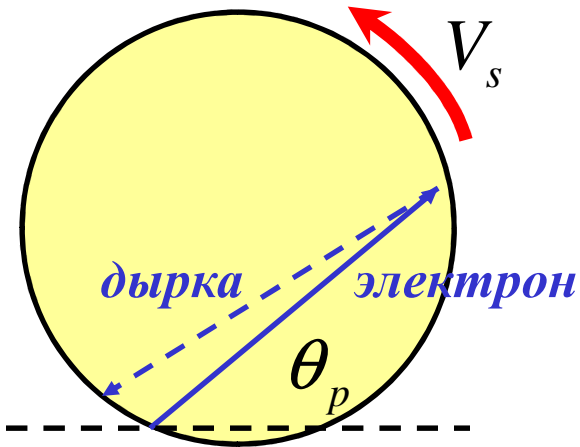
$$\hbar \frac{\partial \theta_p}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mu} = -\omega$$

Частота
прецессии



Прецессия классической траектории

Отклонение от точного
рассеяния назад при
андреевском отражении в
коре вихря



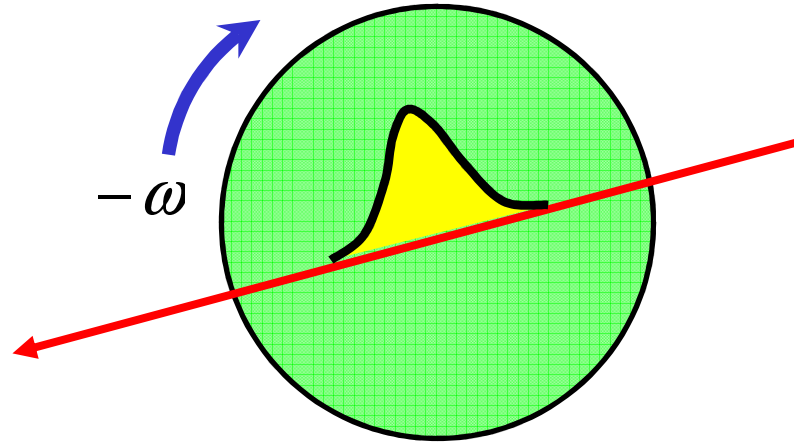
$$\delta\theta_p \sim \frac{V_s}{V_\perp} \quad \delta t \sim \frac{\xi}{V_F}$$

$$\frac{\delta\theta_p}{\delta t} \sim \frac{V_s V_F}{\xi V_\perp} \sim \frac{V_s k_F}{\xi k_\perp} \sim \frac{\Delta_0}{k_\perp \xi \hbar} \sim \frac{\omega}{\hbar}$$



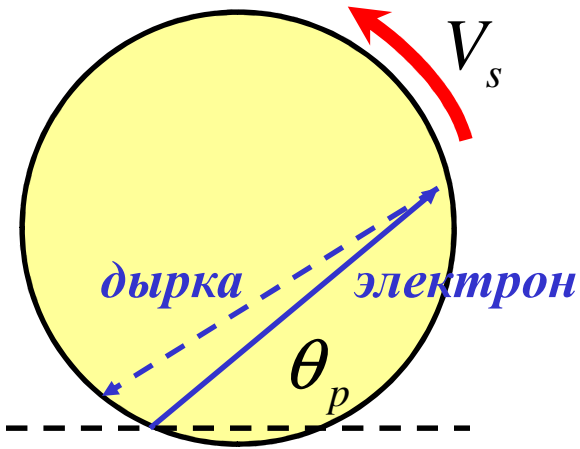
$$\hbar \frac{\partial \theta_p}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mu} = -\omega$$

Частота
прецессии



Прецессия классической траектории

Отклонение от точного
рассеяния назад при
андреевском отражении в
коре вихря



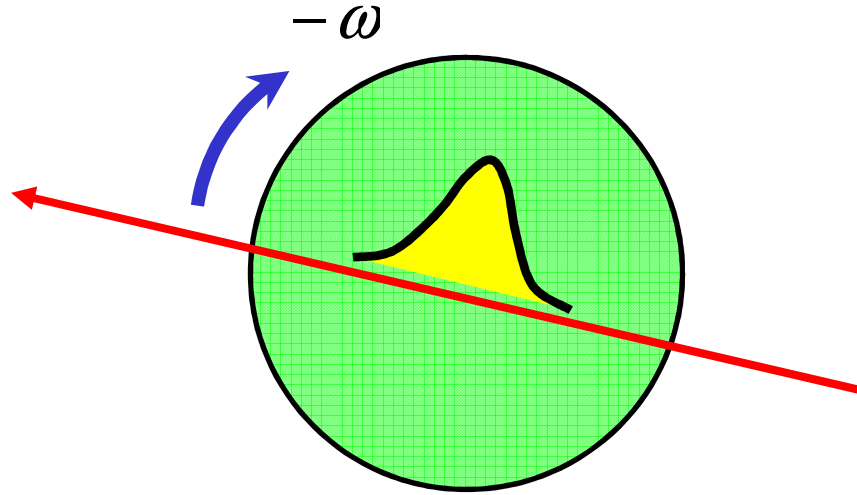
$$\delta\theta_p \sim \frac{V_s}{V_\perp} \quad \delta t \sim \frac{\xi}{V_F}$$

$$\frac{\delta\theta_p}{\delta t} \sim \frac{V_s V_F}{\xi V_\perp} \sim \frac{V_s k_F}{\xi k_\perp} \sim \frac{\Delta_0}{k_\perp \xi \hbar} \sim \frac{\omega}{\hbar}$$



$$\hbar \frac{\partial \theta_p}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mu} = -\omega$$

Частота
прецессии



Квантовая механика прецессирующих траекторий

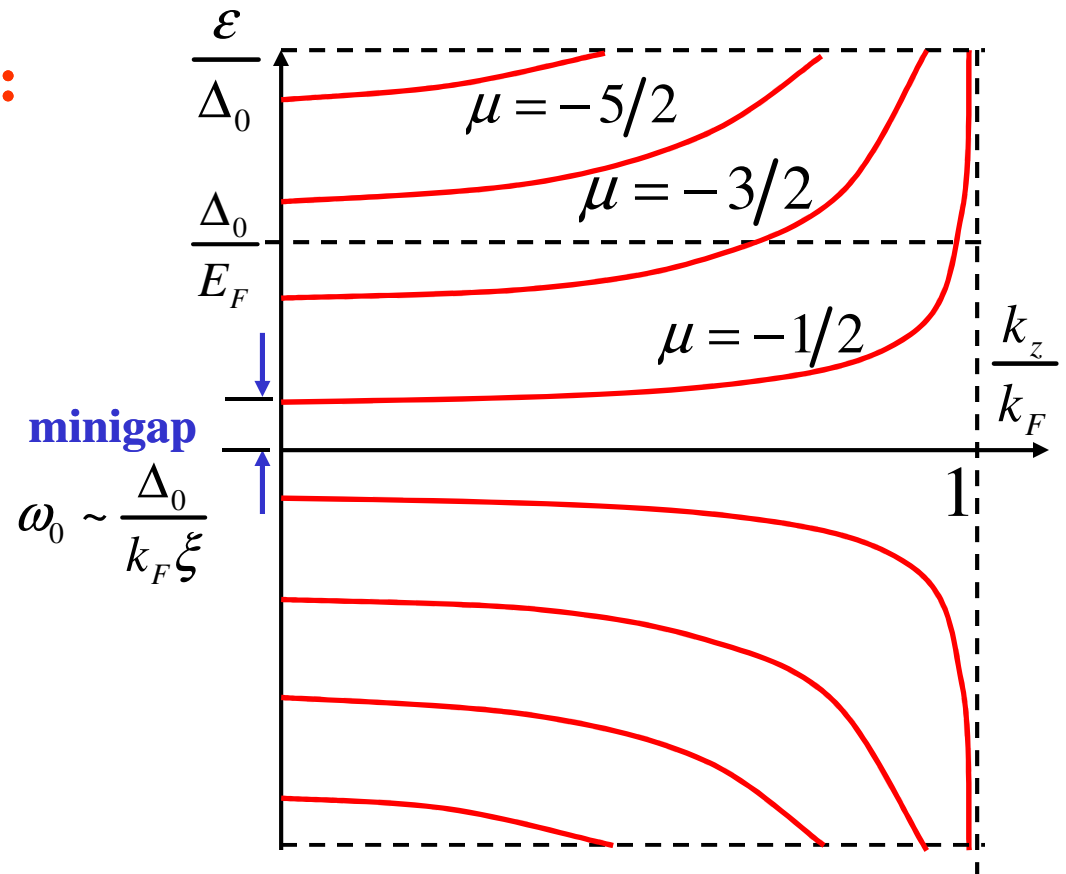
$$[\theta_p, \hat{\mu}] = i$$

Спектр квазичастиц в вихре:
правило квантования Бора-
Зоммерфельда

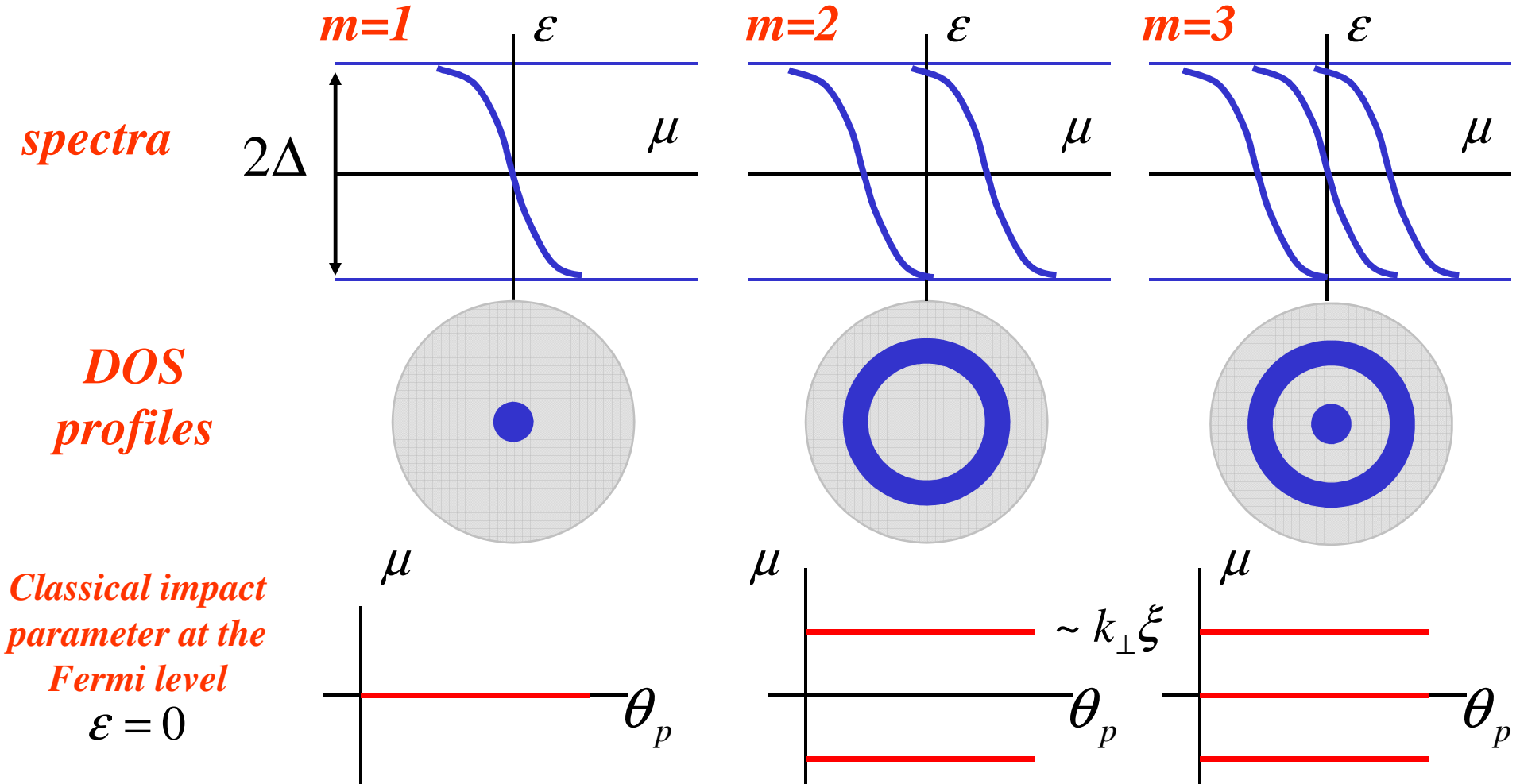
$$\int_0^{2\pi} \mu(\theta_p) d\theta_p = 2\pi(n + \beta)$$

$$\varepsilon_n(k_z) \approx \frac{\Delta_0}{\xi} \left(\frac{n + \beta}{k_{\perp}} + b \right)$$

Spectrum as a function of the momentum component along the vortex axis



Аномальные ветви спектра в многоквантовых вихрях. Теорема о числе нулевых мод.



G.E.Volovik (1993)

D.Rainer, J.A.Sauls, and D.Waxman (1996); Y.Tanaka et al. (1993,1995); S.M.M.Virtanen and M.M.Salomaa (1999); ASM and V.Vinokur (2002); K.Tanaka, I.Robel, B.Janko (2002)

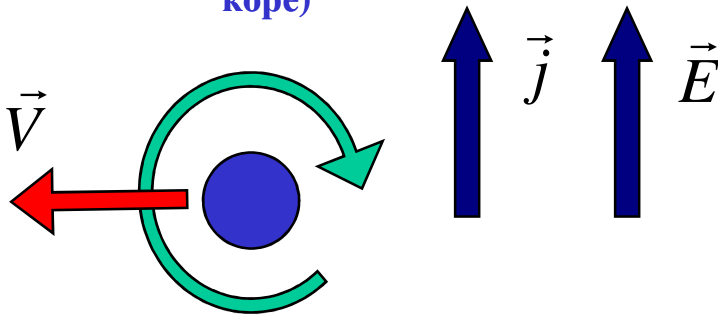
Динамика вихрей. Спектральный поток.

Вязкое течение потока или увлечение вихрей сверхтоком?

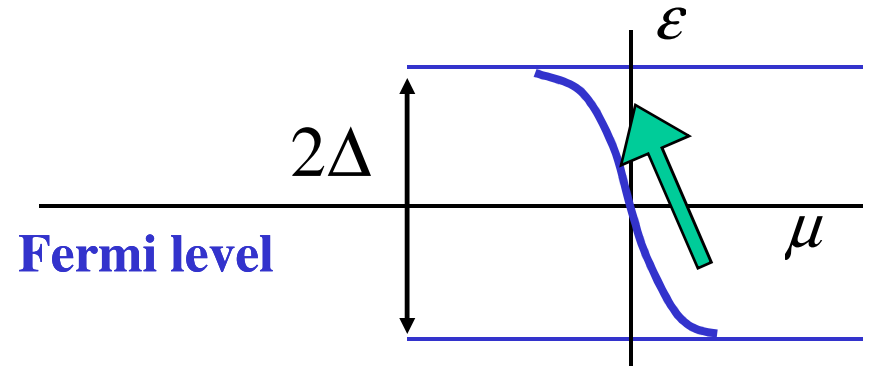
$$\eta \vec{V} + \gamma [\vec{V}, \vec{z}_0] = \frac{\phi_0}{c} [\vec{j}, \vec{z}_0] + \vec{F}$$

Вязкость

(диссипация – за счет нормальных токов в коре)



$$\rho = \rho_n \frac{H}{H_{c2}}$$



$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{\hbar} \left(\frac{\partial H}{\partial \mu} \frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial \mu} \right) = -\nu (f - f_0)$$

Thermal transport along vortex lines

Landauer approach

$$\kappa_v = \frac{\pi T}{3\hbar} N_{eff} = \kappa_0 N_{eff}$$

Number of transverse modes

Can we consider vortices as N wires?

$$N_{eff} \sim (k_F \xi)^2$$

$$\kappa(B) = n \kappa_v \propto \kappa_n \frac{B}{H_{c2}}$$

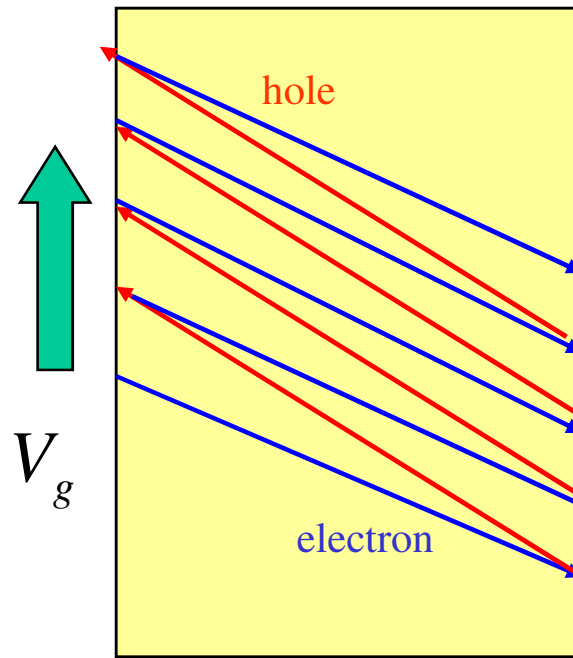
Experiment: J.Lowell and J.B.Sousa (1970); W. F. Vinen et al. (1971)

$$\kappa(B) \ll \kappa_n \frac{B}{H_{c2}}$$

?

Andreev reflection suppresses the effective number of transport modes

Nonquasiclassical trajectory drift



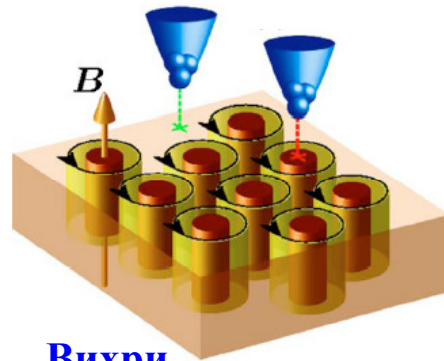
Group velocity along vortex axis

$$V_g = \frac{\partial \epsilon}{\hbar \partial k_z} \sim V_F \frac{\epsilon}{E_F}$$

$$\kappa \sim \frac{T}{\hbar} (k_F \xi)^2 \frac{V_g}{V_F}$$

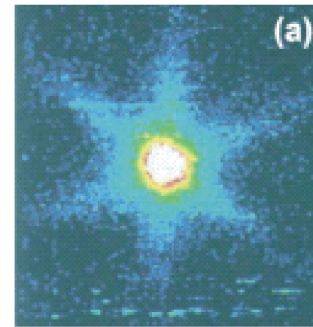
$$\kappa \propto \frac{T^2}{\hbar \Delta} k_F \xi$$

**Сканирующая туннельная микроскопия/спектроскопия.
Эффективный метод исследования природы сверхпроводящего спаривания.**



Вихри

$dI/dV(x,y)$



Пик плотности состояний в центре вихря

Reference STM images of vortex cores.

VOLUME 67, NUMBER 12

PHYSICAL REVIEW LETTERS

16 SEPTEMBER 1991

Scanning Tunneling Spectroscopy of a Vortex Core from the Clean to the Dirty Limit

Ch. Renner, A. D. Kent, Ph. Niedermann, and Ø. Fischer

Département de Physique de la Matière Condensée, University of Geneva, 24 quai Ernest-Ansermet, CH-1211 Geneva, Switzerland

F. Lévy

Institut de Physique Appliquée, Ecole Polytechnique Fédérale Lausanne, CH-1015 Lausanne, Switzerland

(Received 1 July 1991)

The local density of states of a superconducting vortex core has been measured as a function of disorder in the alloy system $\text{Nb}_{1-x}\text{Ta}_x\text{Se}_2$ using a low-temperature scanning tunneling microscope. The peak observed in the zero-bias conductance at a vortex center is found to be very sensitive to disorder. As the mean free path is decreased by substitutional alloying the peak gradually disappears and for $x=0.2$ the density of states in the vortex center is found to be equal to that in the normal state. The vortex-core spectra hence may provide a sensitive measure of the quasiparticle scattering time.

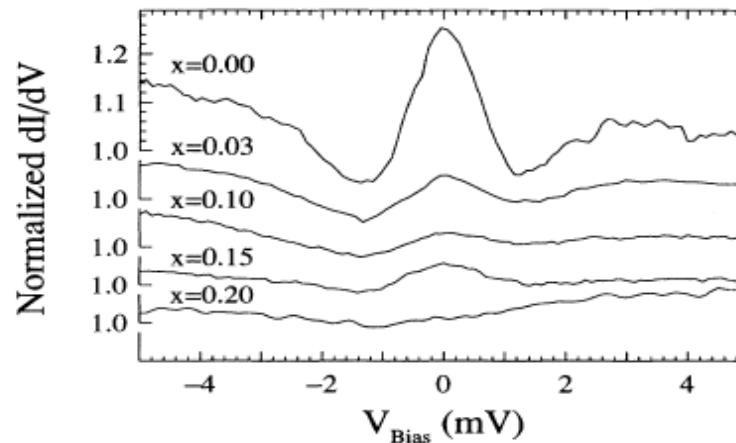


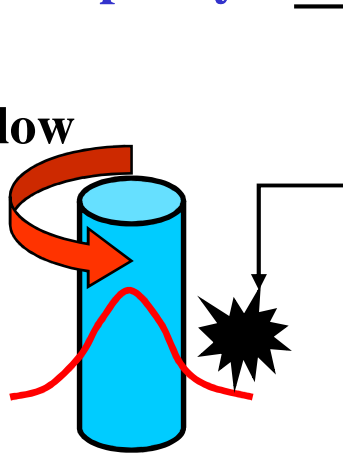
FIG. 3. Spectra taken at the center of a vortex core for various Ta substitutions at 1.3 K and 0.3 T. The spectra are normalized to the differential conductance at high bias.

Влияние беспорядка на электронную структуру вихрей. От чистого к грязному пределу.

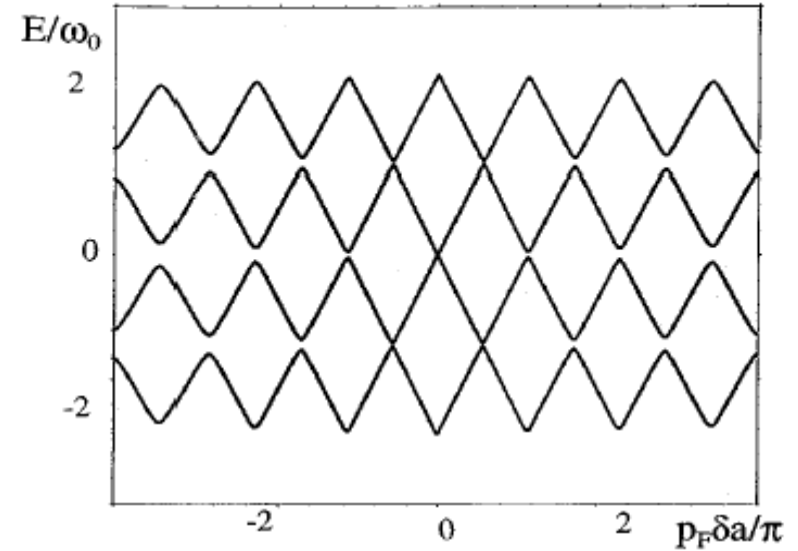
1. Один атом примеси в коре

Vortex line with an impurity
atom in the core

superflow



Larkin-Ovchinnikov
1998



2. Увеличение концентрации
примесей = размытие zero-bias
аномалии в центре вихря

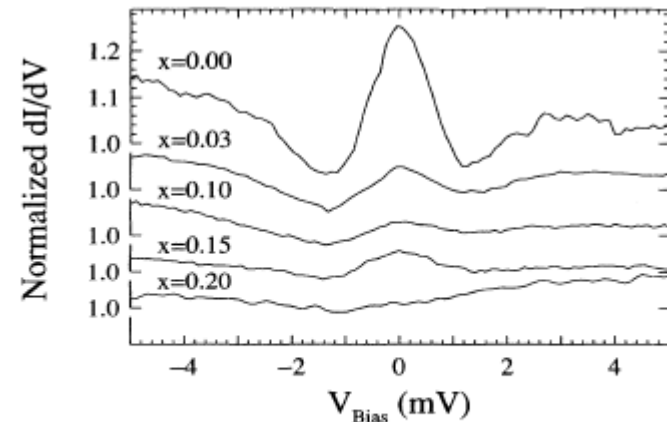


FIG. 3. Spectra taken at the center of a vortex core for various Ta substitutions at 1.3 K and 0.3 T. The spectra are normalized to the differential conductance at high bias.

STM наблюдения вихрей. DOS

$$LDOS = \sum_{\lambda} |u_{\lambda}(\vec{r})|^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\lambda})$$

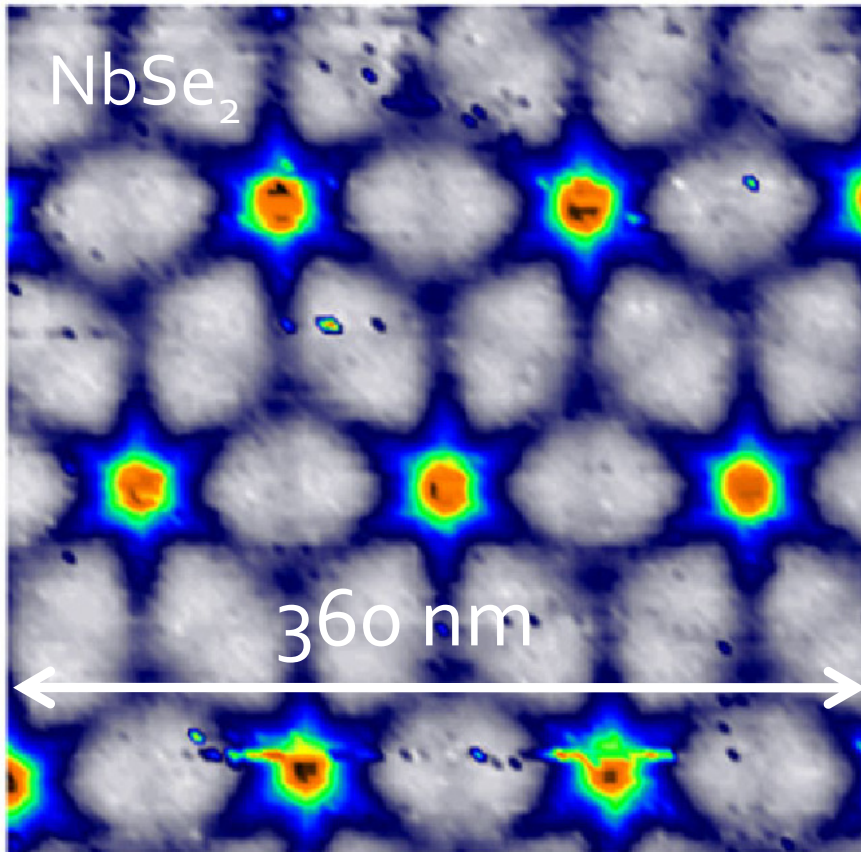
PRL **101**, 166407 (2008)

PHYSICAL REVIEW LETTERS

week ending
17 OCTOBER 2008

Superconducting Density of States and Vortex Cores of 2H-NbS₂

I. Guillamón,¹ H. Suderow,¹ S. Vieira,¹ L. Cario,² P. Diener,³ and P. Rodière³



PRL, **101**, 166407 (2008)

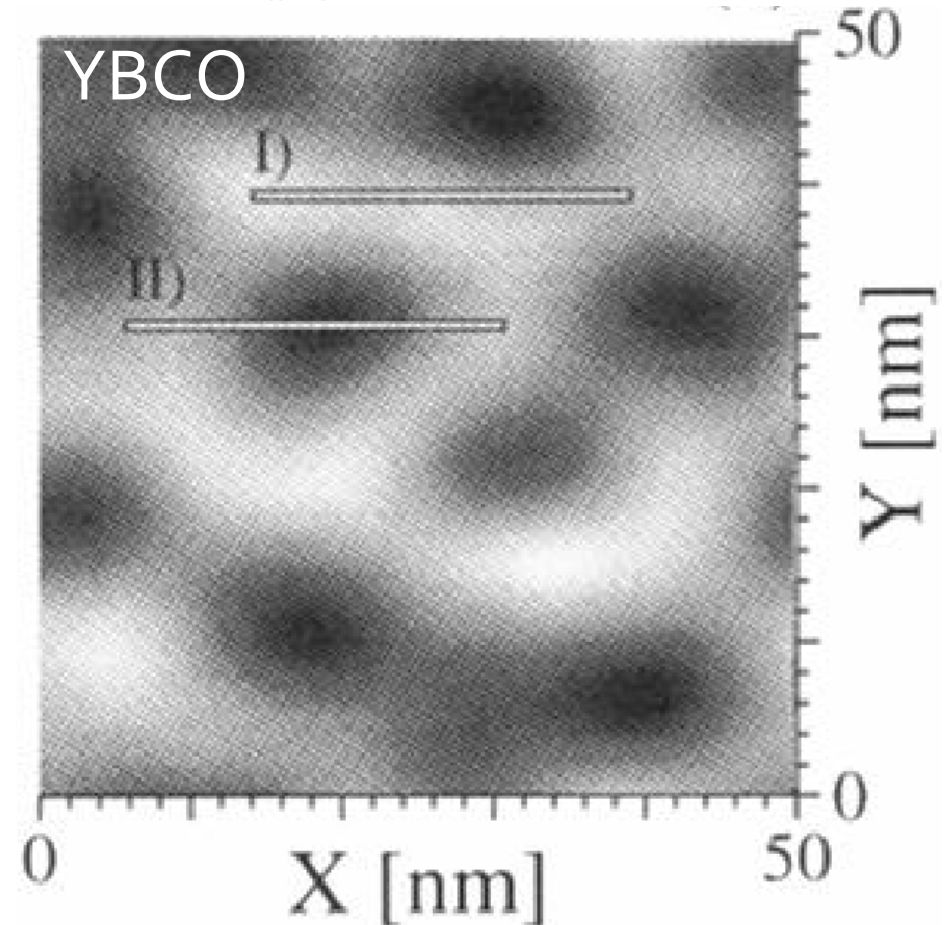
VOLUME 75, NUMBER 14

PHYSICAL REVIEW LETTERS

2 OCTOBER 1995

Direct Vortex Lattice Imaging and Tunneling Spectroscopy of Flux Lines on YBa₂Cu₃O_{7-δ}

I. Maggio-Aprile, Ch. Renner, A. Erb, E. Walker, and Ø. Fischer

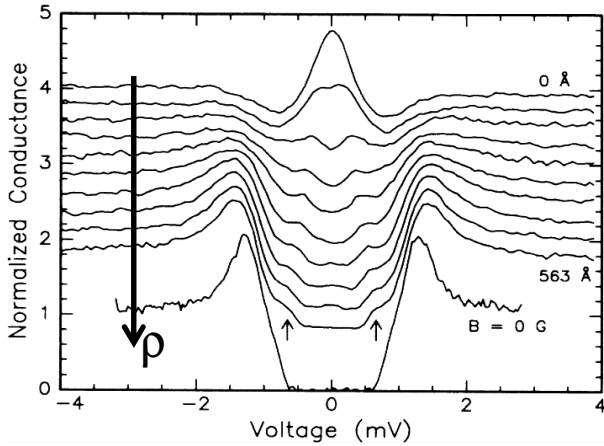


PRL, **75**, 2754 (1995)

STM experimental results

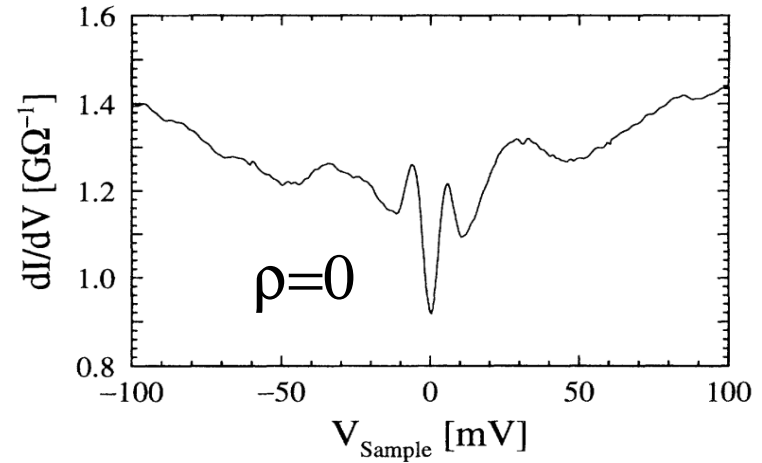
H. F. Hess et al PRL (1990)

$NbSe_2$

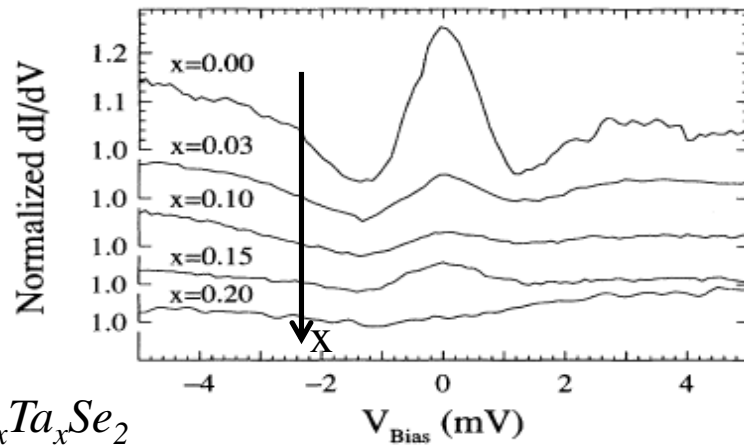


I. Maggio-Aprile et al PRL (1995)

$YBCO$



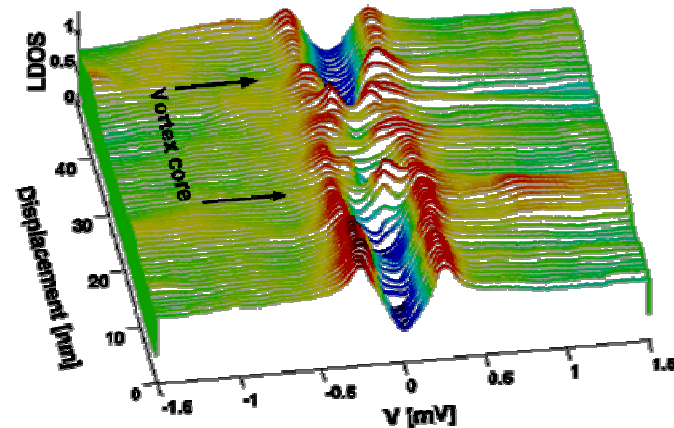
Ch. Renner et al PRL (1991)



$Nb_{1-x}Ta_xSe_2$

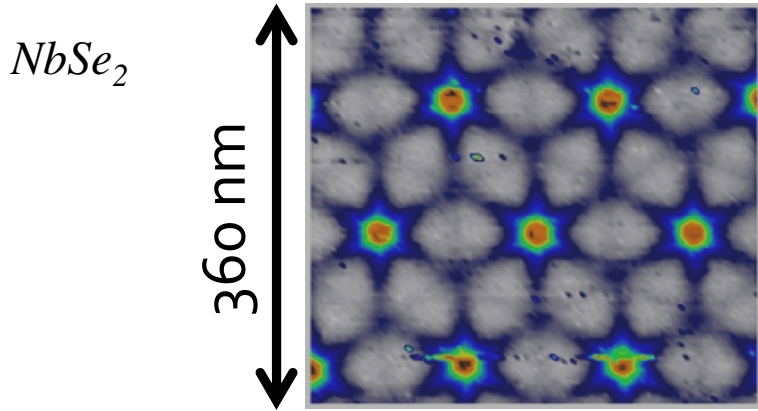
B. Sacepe et al PRL (2006)

Boron doped diamond

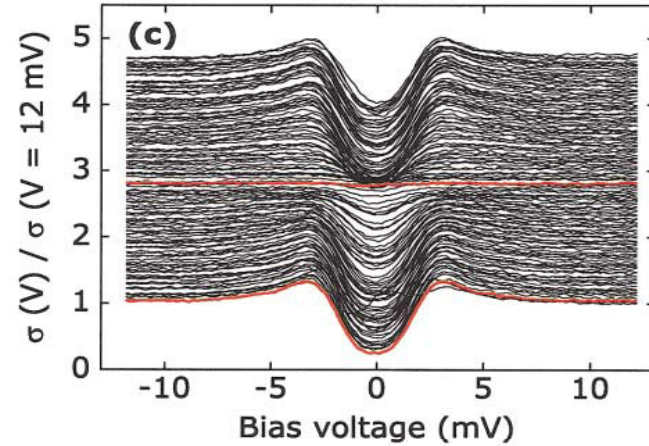


STM experimental results

I. Guillamon et al PRL (2008)

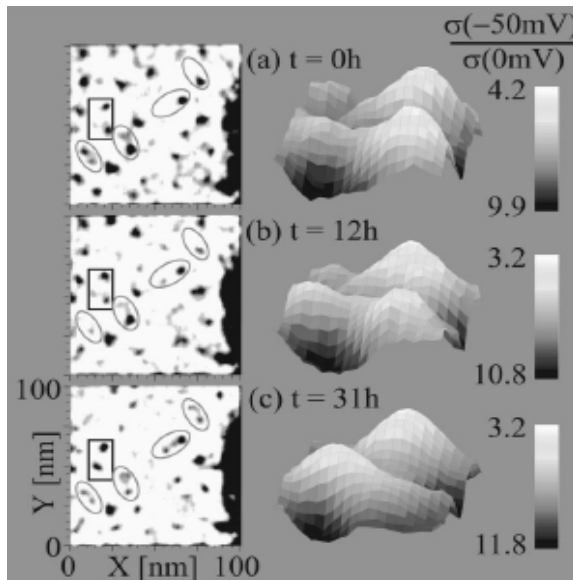


M.R. Eskildsen et al PRL (2002)

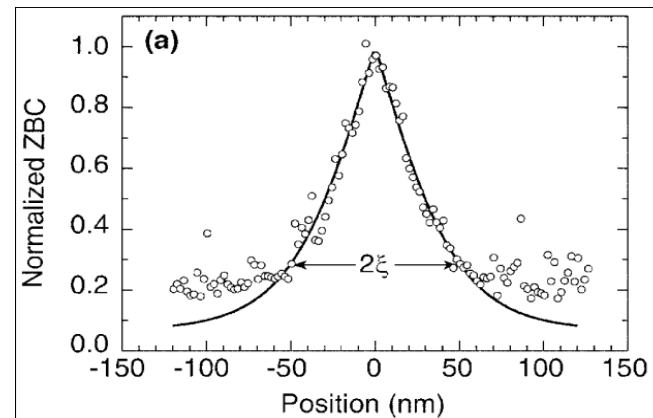


B. W. Hoogenboom et al PRB (2000)

$BSCCO$



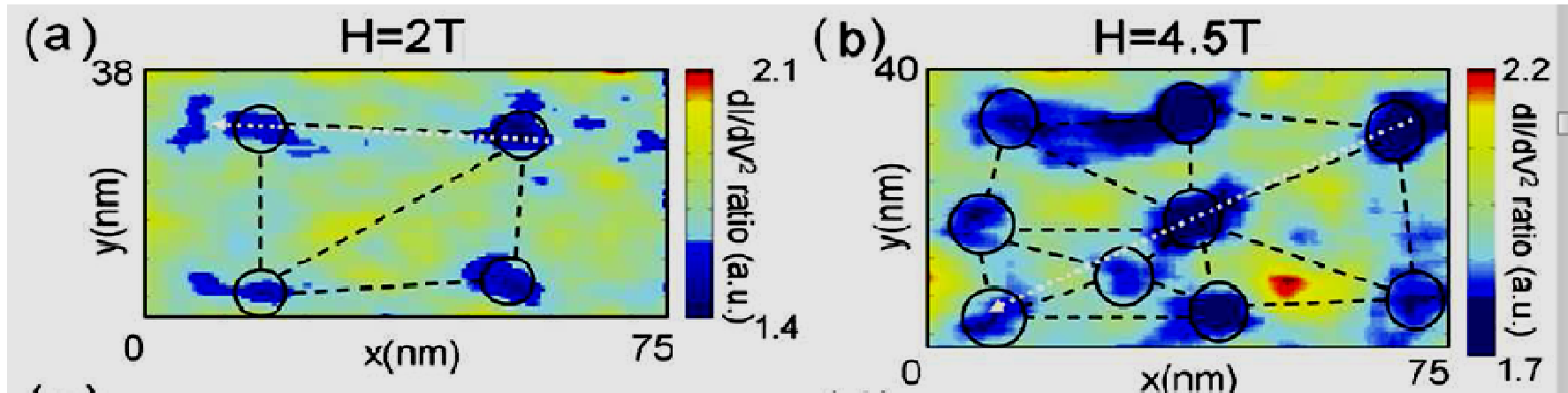
$$\xi_{theor} \sim \sqrt{\Phi_0 / H_{c2}} \ll \xi_{exp}$$



STM experiment: Anomalous Large Vortex Core

N. C. Yeh et al EPL (2009)

YBCO



plied by the area, within experimental errors. Thus, we obtain averaged vortex lattice constants $a_B = 33.2$ nm and 23.5 nm for $H = 2$ T and 4.5 T, respectively, comparable to the theoretical values of $a_B = 35.0$ nm and 23.3 nm. On the other hand, the mean “vortex halo” radius ξ_{halo} is much longer than the SC coherence length ξ_{SC} , and the average ξ_{halo} decreases with field. We find $\xi_{\text{halo}} = (7.7 \pm 0.3)$ nm for $H = 2$ T, (6.4 ± 0.6) nm for $H = 4.5$ T, and (5.0 ± 0.7) nm for $H = 6$ T.

Why the local density of states can differ from the standard CdGM picture?

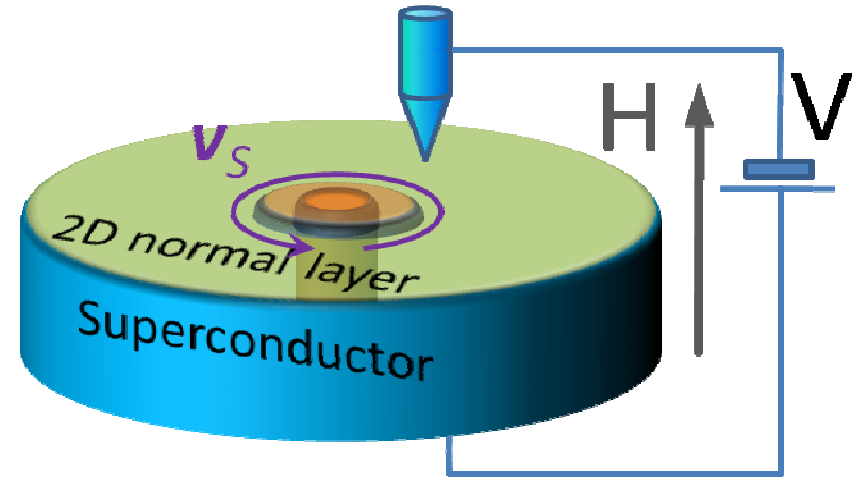
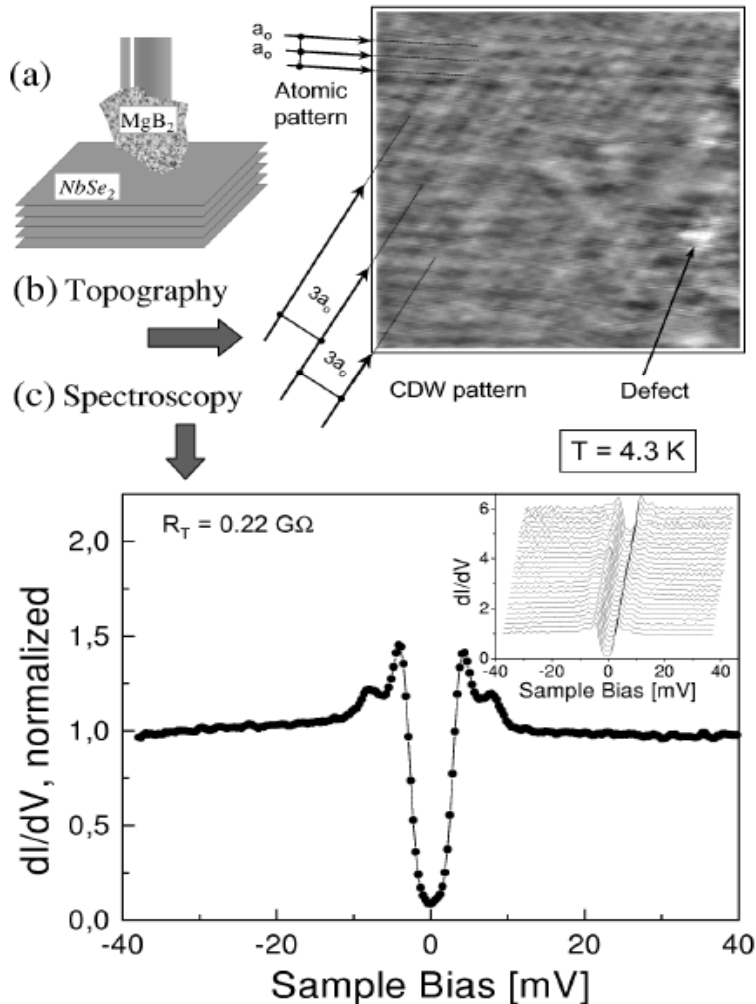
(splitting of LDOS peak, splitting or absence of zero-bias anomaly, anomalously large minigap or vortex size, ...)

- **Vortex-vortex interaction**
(tunneling of quasiparticles between vortex cores)
- **Normal (elastic) scattering at inhomogeneities**
(boundaries, impurities etc.)
 - **Interaction with pinning centers**
(deformation of the vortex core structure)
 - **Unconventional superconducting pairing?**
 - **Additional order parameter?**
 - **Proximity induced superconductivity?**

Influence of surface layer

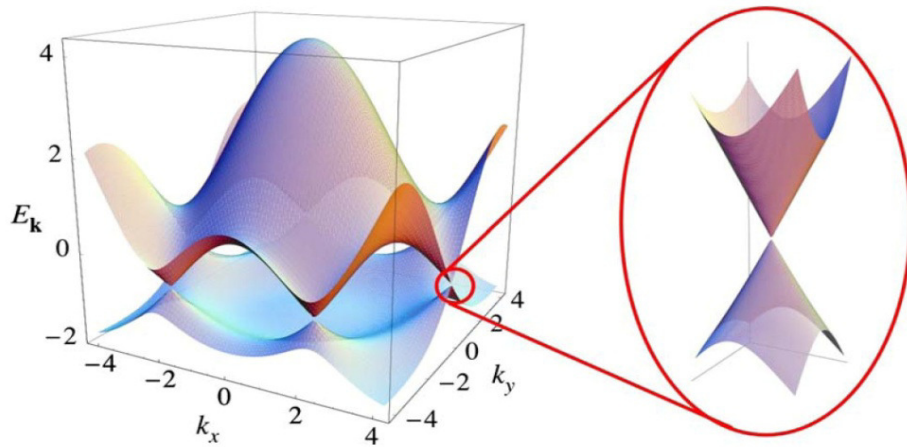
D. Roditchev et al PRL (2001)

Two Gap State Density in MgB_2 : A True Bulk Property or A Proximity Effect?



- Can we probe superconducting bulk properties by STM?
- Can surface layer *imitate* the complex superconducting order parameter?
- Can it result in suppression or splitting of ZBA?
 - Disorder effects

Induced superconductivity in graphene and topological insulators



Graphene spectrum



Superconductor – graphene junction

K. Komatsu et al, 2012

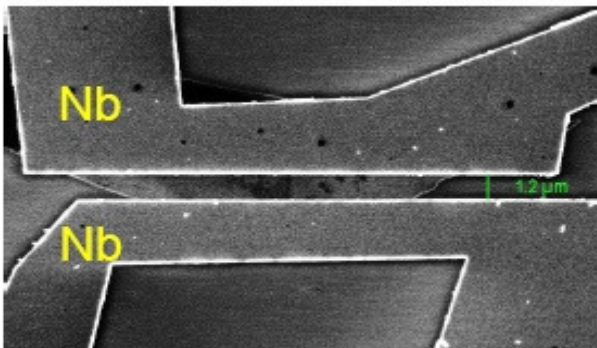
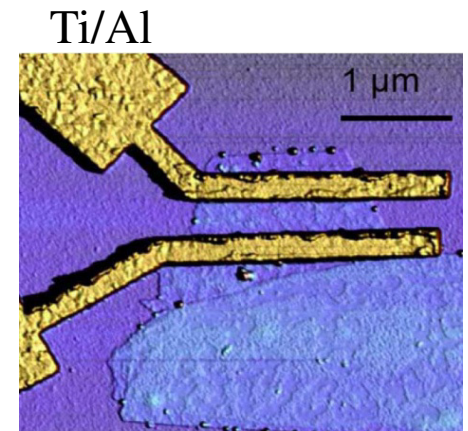


FIG. 2: Scanning electron micrograph of the graphene sample connected to Nb electrodes. The distance between electrodes is $L = 1.2 \mu\text{m}$ and the graphene width is $W = 12 \mu\text{m}$.



Hubert B. Heersche et al, 2007

Search for Majorana quasiparticles

PRL 114, 017001 (2015)

PHYSICAL REVIEW LETTERS

week ending
9 JANUARY 2015

Experimental Detection of a Majorana Mode in the core of a Magnetic Vortex inside a Topological Insulator-Superconductor $\text{Bi}_2\text{Te}_3/\text{NbSe}_2$ Heterostructure

Jin-Peng Xu,¹ Mei-Xiao Wang,¹ Zhi Long Liu,¹ Jian-Feng Ge,¹ Xiaojun Yang,² Canhua Liu,^{1,5,*}
Zhu An Xu,^{2,5} Dandan Guan,¹ Chun Lei Gao,¹ Dong Qian,¹ Ying Liu,^{1,3,5} Qiang-Hua Wang,^{4,5}
Fu-Chun Zhang,^{2,5} Qi-Kun Xue,⁶ and Jin-Feng Jia^{1,5,†}

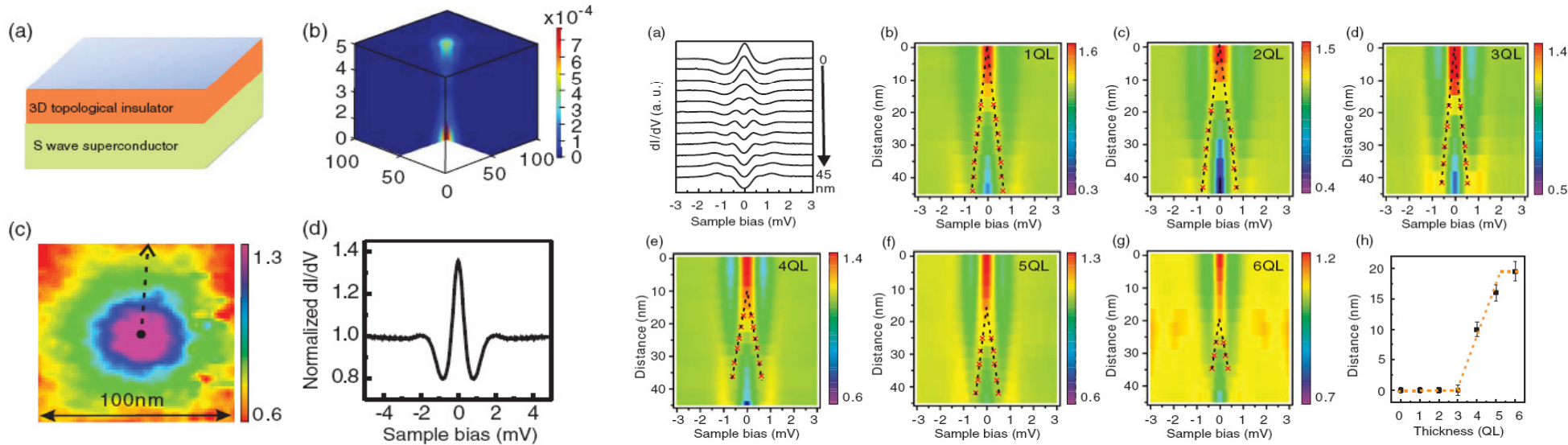
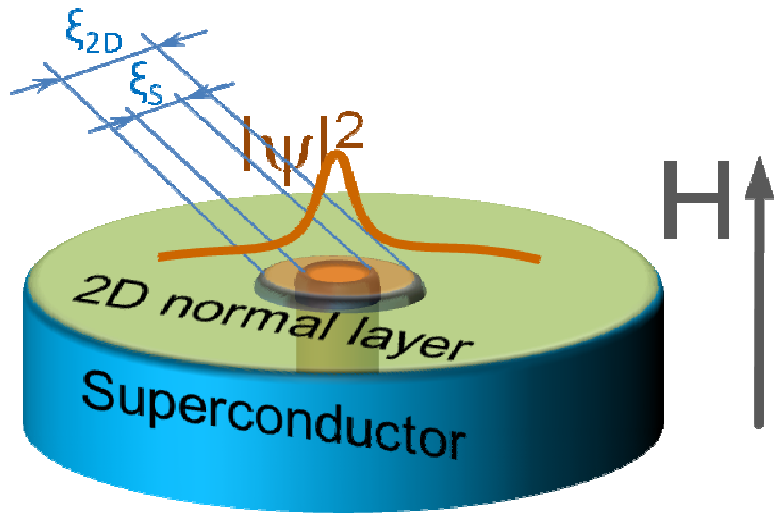


FIG. 1 (color). (a) A schematic illustration of topological insulator-superconductor heterostructure. (b) The calculated results showing two Majorana modes in a vortex core on 5 QL $\text{Bi}_2\text{Te}_3/\text{NbSe}_2$. (c) A vortex mapped by zero-bias dI/dV on 5 QL $\text{Bi}_2\text{Te}_3/\text{NbSe}_2$ at 0.1 T and 0.4 K. (d) A sharp zero-bias peak in the dI/dV spectrum measured at the center of the vortex in (c).

Vortex states in a system with induced superconducting order.

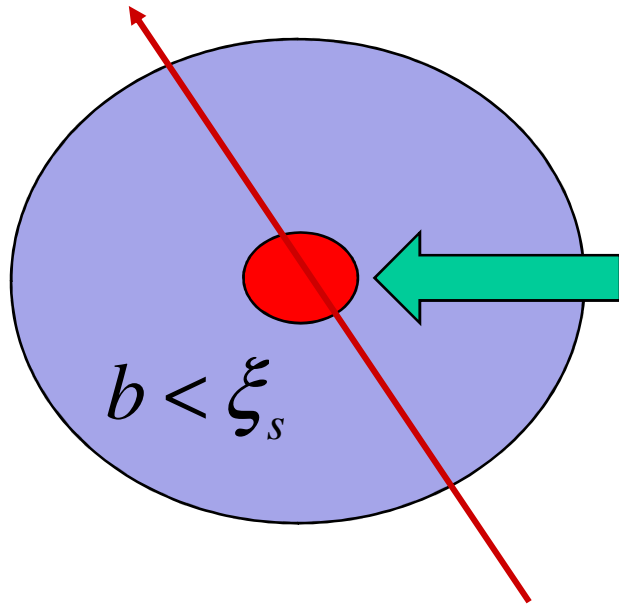
Multiple vortex core.



Small core of the size of a superconducting coherence length

Large core with the size determined by the effective coherence length in a 2D layer

Multiple vortex core. Gap potentials induced by a vortex line.



Clean limit. Coherent tunneling.

$$\Sigma_{localized} \sim \frac{1}{\mathcal{E} - \mathcal{E}_0}$$

Solution: scale separation method.

Energy spectrum.

$$[\mathcal{E} - \mathcal{E}_2(b)][\mathcal{E} - \mathcal{E}_0(b)] + \Gamma \left[\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 - [\mathcal{E} - \mathcal{E}_2(b)]^2} \right] = 0$$

Anomalous branches in the quasiparticle spectrum in the core: splitting of the zero – bias anomaly

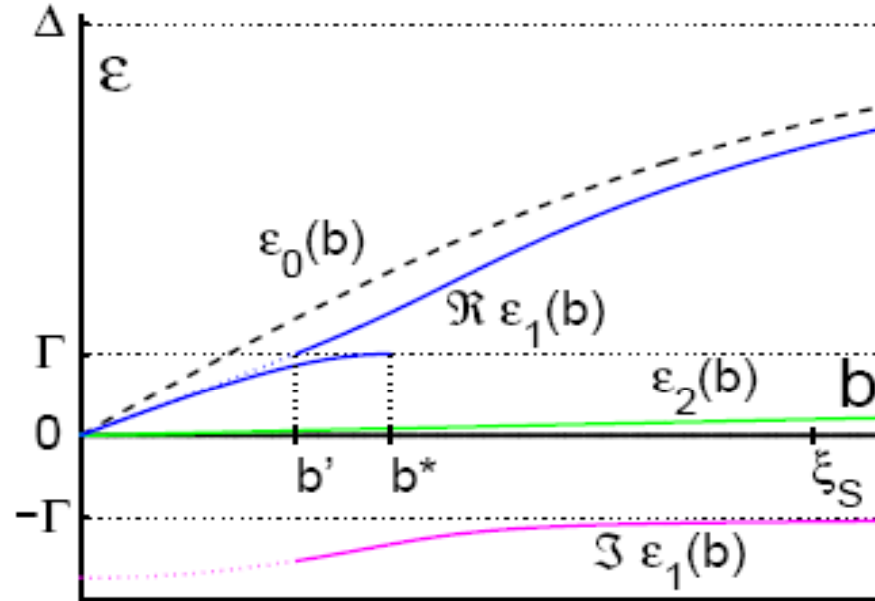
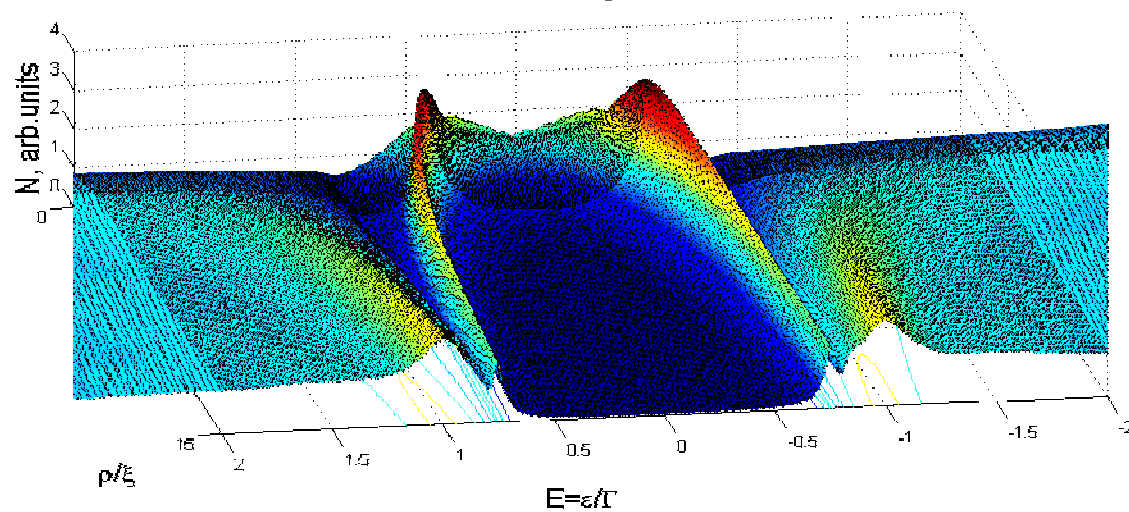
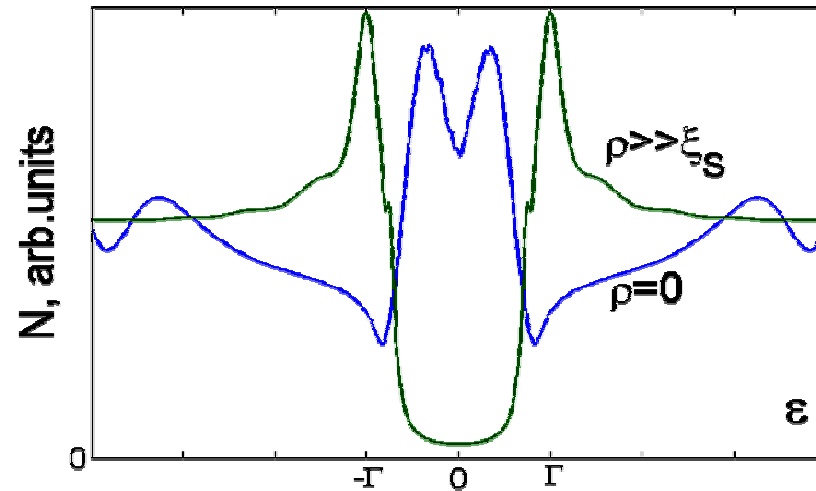


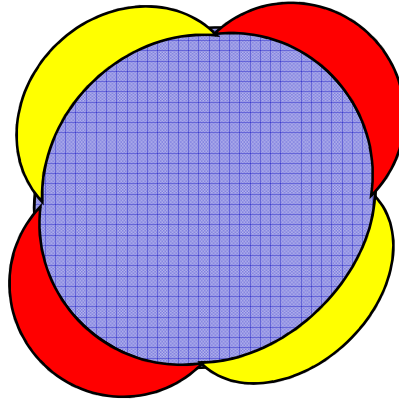
FIG. 1: (Color online) Two-scale behavior of the spectrum, Eq. (9), for coherent tunnelling. The spectrum has two localized branches, $\epsilon_1(b)$ and $\epsilon_2(b)$, for $\epsilon < \Gamma$. The branch $\epsilon_2(b)$ has a scale ξ_{2D} , it saturates at $\epsilon = \Gamma$ for $b \gg \xi_{2D}$. $\epsilon_1(b)$ has a scale ξ_S . For $\Re\epsilon > \Gamma$ it transforms into scattering resonances. b^* is defined as $\epsilon_1(b^*) = \Gamma - 0$, while b' corresponds to $\Re\epsilon_1(b') = \Gamma + 0$.

Incoherent tunneling: splitting of the zero – bias anomaly



Puzzles of quasiparticles in d-wave superconductors.

Motivation: High-Tc cuprates



$$\Delta = \frac{\Delta_0 k_x k_y}{k_F^2}$$

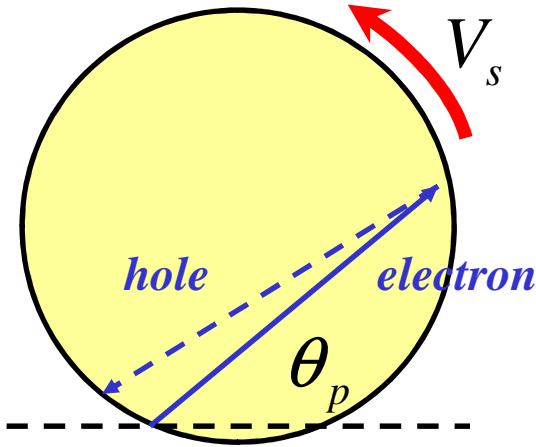
G.Volovik (1993): important role of the nodal quasiparticles

$$\mathcal{E} = \pm \sqrt{\Delta^2(\vec{k}) + \xi^2(\vec{k})} + \vec{p}_F \vec{V}_s$$

N.Kopnin (1998): generalization of CdGM solution for localized core states in d-wave case

Precession of classical trajectory in a vortex

Deviation from exact backscattering during Andreev reflection in the core



$$\delta\theta_p \sim \frac{V_s}{V_\perp} \quad \delta t \sim \frac{\xi}{V_F}$$

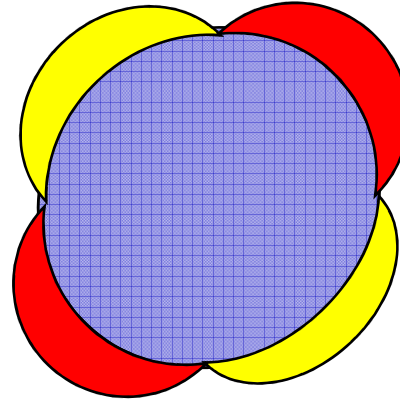
$$\frac{\delta\theta_p}{\delta t} \sim \frac{V_s V_F}{\xi V_\perp} \sim \frac{V_s k_F}{\xi k_\perp} \sim \frac{\Delta_0}{k_\perp \xi \hbar} \sim \frac{\omega}{\hbar}$$



$$\hbar \frac{\partial \theta_p}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mu} = -\omega$$

Precession frequency

$$\Delta = \frac{\Delta_0 k_x k_y}{k_F^2}$$



Quasiparticles escape from the core through the gap nodes.

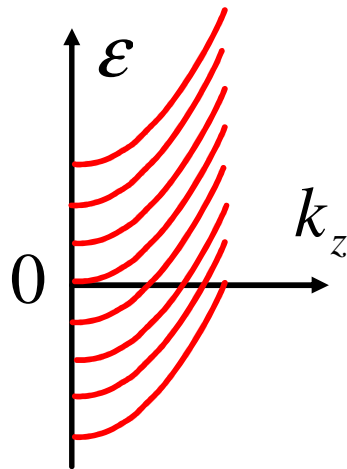
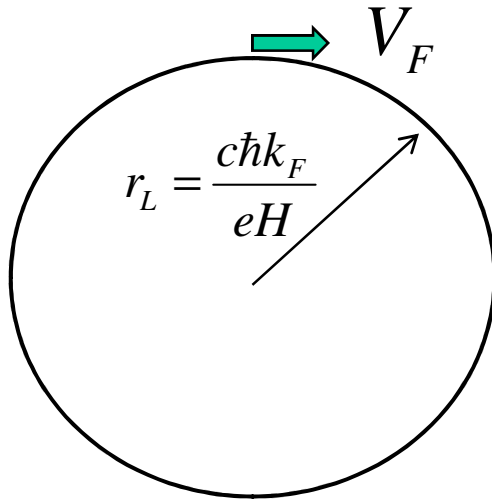
CdGM states and delocalized states are hybridized.

Question:

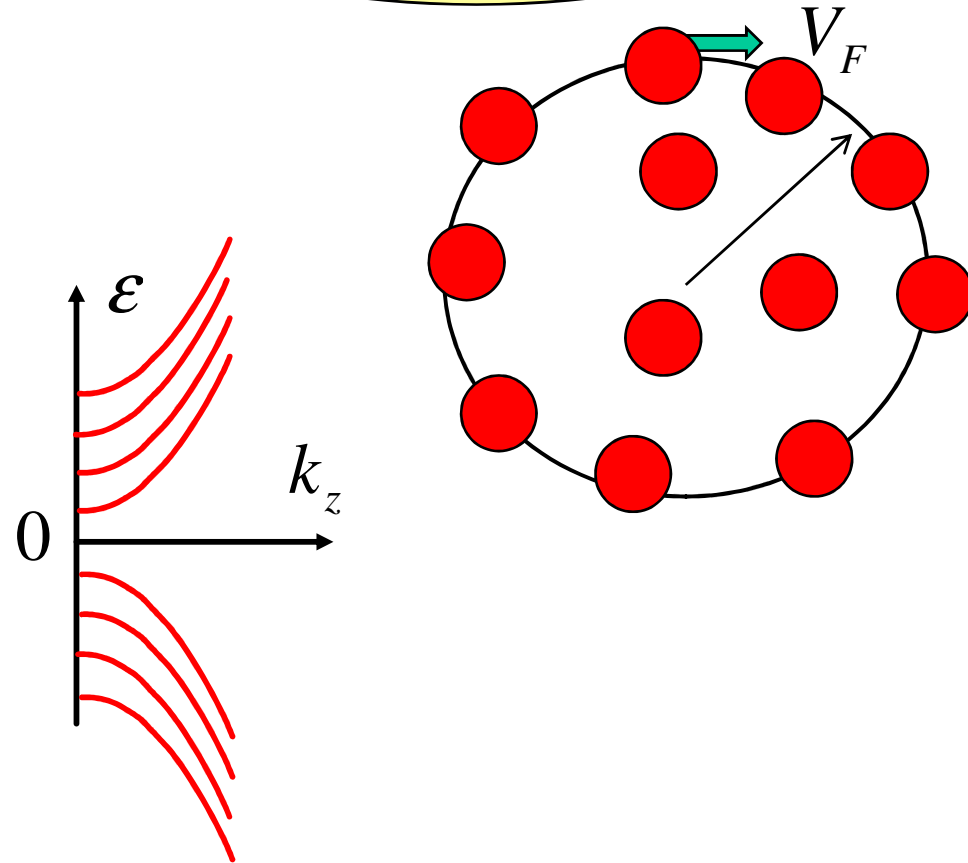
Can we still get closed trajectories and discrete energy levels?

Similar problem: de Haas-van Alfen oscillations in superconductors.

Normal metal.
Landau spectrum.
Cyclotron orbits.



Superconductor.
Caroli – de Gennes – Matricon
spectrum with minigap.
Cyclotron orbits are destroyed.



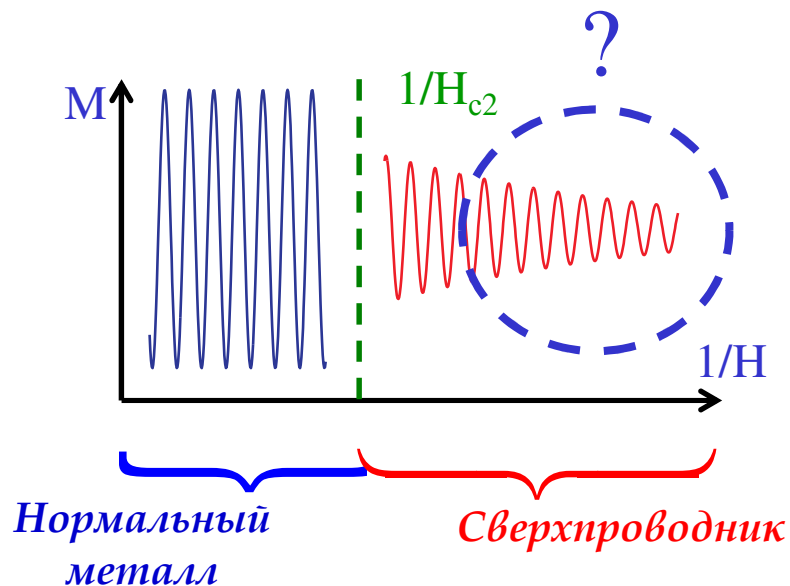
Квантовые осцилляционные эффекты в сверхпроводниках

Большое межвихревое
расстояние.
Caroli – de Gennes – Matricon
спектр.
Минищель.

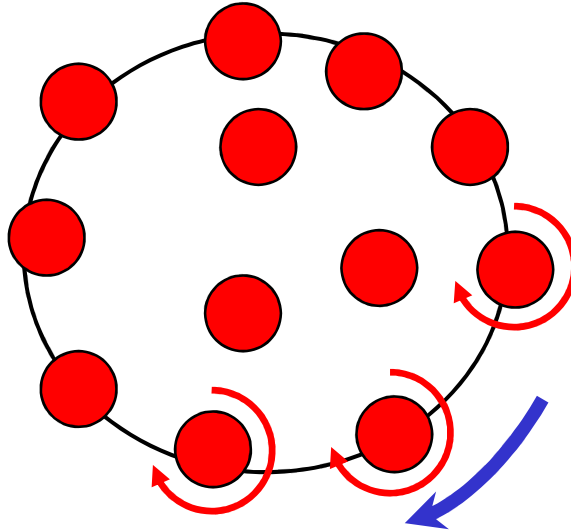


Нормальный металл
Спектр Ландау.
Минищели нет.
Осцилляции де Гааза – ван
Альфена.

Механизм кроссовера ?



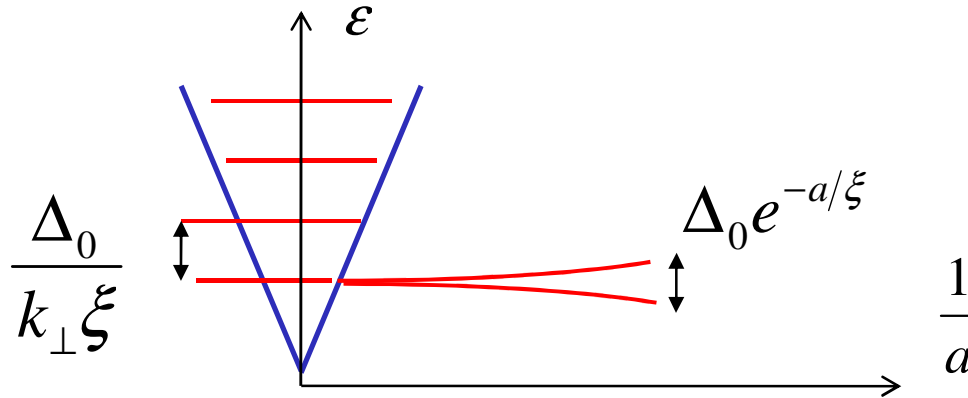
**Precession of classical trajectory inside vortex core
competes
with rotation along the cyclotron trajectory**



Question: how to restore the cyclotron motion?

Answer: to take account of quasiparticle tunneling between the vortex cores.

Qualitative arguments.
Critical intervortex distance:
minigap = energy level splitting due to tunneling



$$a_c \approx \frac{\xi}{2} \ln(k_F \xi)$$

Typical
intervortex
distance $a \sim \sqrt{\frac{\phi_0}{H}}$

$$k_F \xi \sim 10^2 \div 10^3$$

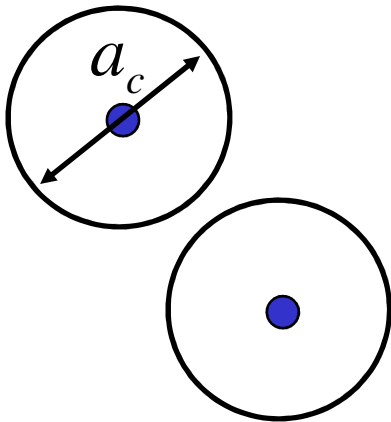
$$\frac{a_c}{\xi} \approx 2 \div 3$$

$$H^* \sim \frac{\phi_0}{a_c^2} \sim \frac{H_{c2}}{[\ln(k_F \xi)]^2}$$

$$a_{ij} > a_c$$

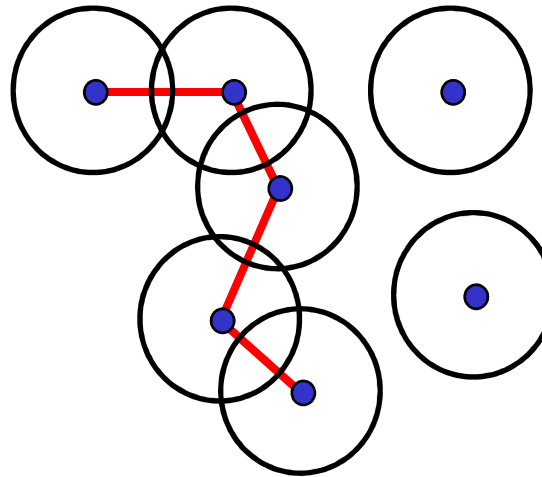
Intervortex tunneling is negligible.

Degenerate CdGM spectrum.



$$a_{ij} < a_c$$

Vortices are strongly coupled by tunneling.



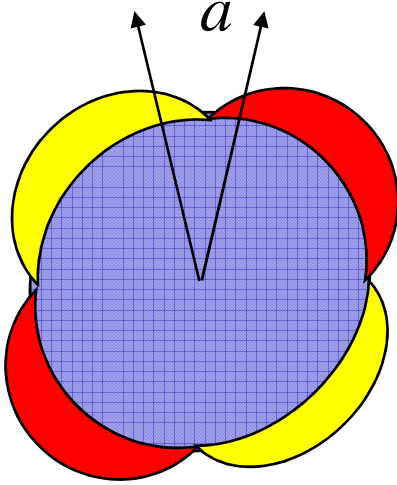
**Vortex cluster in a disordered flux line array:
Spectrum is similar to the one in m-quanta vortex**

**Cluster size~ cyclotron orbit radius.
Can we restore Landau quantization?**

$$a_c \approx \frac{\xi}{2} \ln(k_F \xi)$$

**Hybridization of core states and delocalized states.
Cyclotron arcs are connected by precession of trajectories inside the cores**

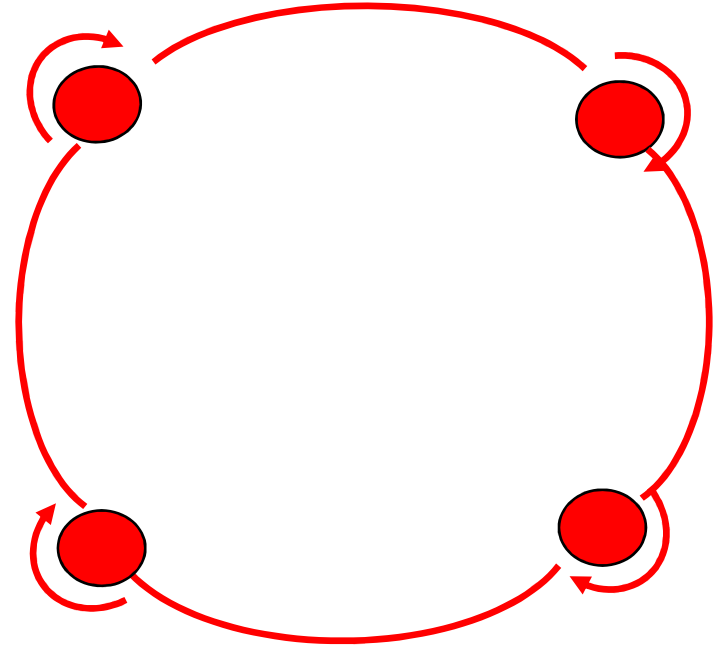
$$\delta\theta \sim \frac{a_c}{a}$$



$$\Delta = \frac{\Delta_0 k_x k_y}{k_F^2}$$

$$\Delta\varphi \sim k_F r_L \frac{a_c}{a} \sim 2\pi(n + \beta)$$

$$k_F^2 \sqrt{\frac{H}{H^*}} \sim \frac{neH}{\hbar c}$$

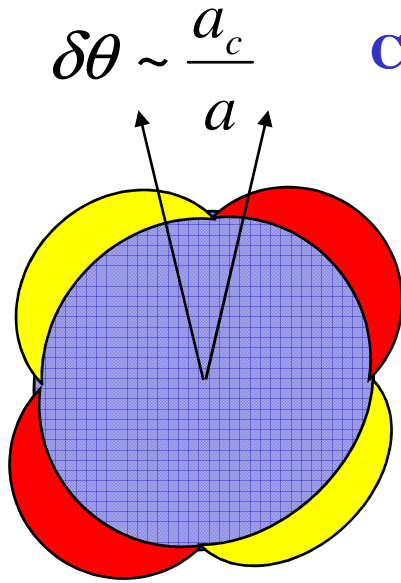


$$\Delta \sqrt{\frac{1}{H}} \sim \frac{2\pi e \sqrt{H^*}}{k_F^2 \hbar c}$$

**Compare with standard
Eq.:**

$$\Delta \left(\frac{1}{H} \right) = \frac{2\pi e}{\hbar c S_{ext}}$$

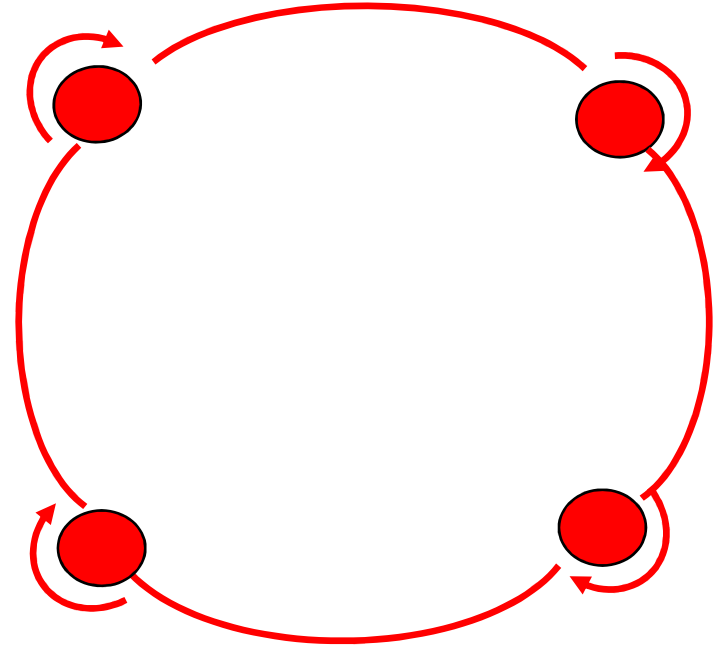
**Hybridization of core states and delocalized states.
Cyclotron arcs are connected by precession of trajectories inside the cores**



$$\Delta = \frac{\Delta_0 k_x k_y}{k_F^2}$$

$$\Delta \varphi \sim k_F r_L \frac{a_c}{a} \sim 2\pi(n + \beta)$$

$$k_F^2 \sqrt{\frac{H}{H^*}} \sim \frac{neH}{\hbar c}$$



$$\Delta \frac{1}{H} \sim \frac{2\pi}{S_{ext}} \frac{e}{\hbar c} \sqrt{\frac{H^*}{H}}$$

**Compare with standard
Eq.:**

$$\Delta \left(\frac{1}{H} \right) = \frac{2\pi e}{\hbar c S_{ext}}$$

Effective area of cyclotron orbit which determines the oscillation period in magnetic field:

$$S_{ext} \rightarrow S_{ext} \sqrt{\frac{H}{H^*}} < S_{ext}$$

Small Fermi pockets?

Energy quantization:

$$\varepsilon_n \sim \frac{ne\hbar\sqrt{HH^*}}{mc} - \frac{\hbar^2 S_{ext}}{m} \sim \hbar n \sqrt{\omega_H \omega_{H^*}} - \frac{\hbar^2 S_{ext}}{m}$$

$$\hbar\omega_H < \delta\varepsilon < \hbar\omega_{H^*} < \hbar\omega_{H_{c2}} = \hbar\omega_0$$

Compare with Eq.10 in [Kopnin, PRB 1998]

What we should remember considering electrons and holes states in vortex state?

- **Quasiclassical approach works nicely in most cases**
 - **Vortex core is an Andreev well**
- **Anomalous spectral branch determines most of the equilibrium and transport properties**
- **Zero bias anomaly is a fingerprint of the anomalous branch**
- **In strong magnetic fields intervortex tunneling modifies the individual vortex spectra**
 - **scattering at defects**

Fermionic zero modes. Majorana states.

$$(H - \mu)u + \int \Delta(r, r')v(r')d^3r' = \varepsilon u$$
$$\int \Delta^+(r', r)u(r')d^3r' + (\mu - H^*)v = \varepsilon v$$

Singlet pairing

$$\Delta(r, r') = i\sigma_y D(r, r')$$

$$D(r, r') = D(r', r)$$

$$\varepsilon \rightarrow -\varepsilon$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -v^* \\ u^* \end{pmatrix}$$

Triplet pairing

$$\Delta(r, r') = i\sigma_y \vec{\sigma} \vec{D}(r, r')$$

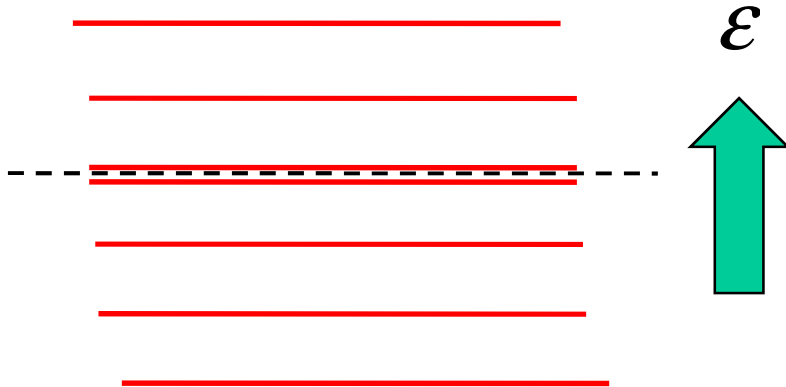
$$\vec{D}(r, r') = -\vec{D}(r', r)$$

$$\varepsilon \rightarrow -\varepsilon$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} v^* \\ u^* \end{pmatrix}$$

Fermionic zero modes. Majorana states.

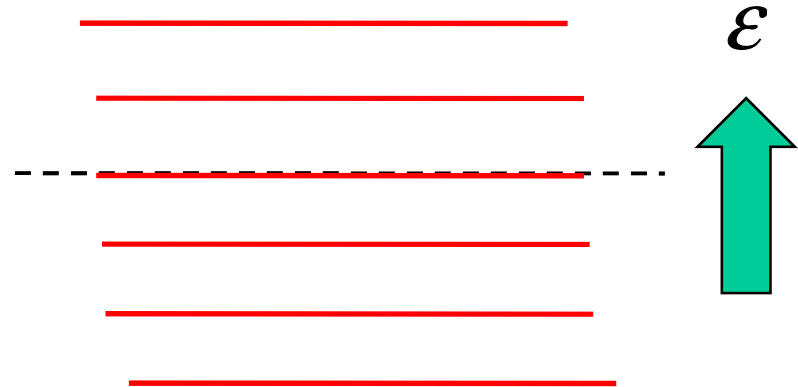
Singlet pairing



$$\gamma^+ \neq \gamma$$

**Standard fermions (with
usual commutation rules)**

Triplet pairing



$$\gamma^+ = \gamma$$

**Majorana fermions (not
fermions at all)**

**Obvious contradiction:
We can not change statistics using canonical
Bogolubov transformation**

$$\begin{aligned}\gamma^+ \gamma + \mathcal{N}^+ &= 1 \\ \mathcal{N} + \mathcal{N} &= 0\end{aligned}$$