Физический институт имени П.Н.Лебедева Российской академии наук
ФИАН

Идеи и методы физики конденсированного состояния
Школа-конференция молодых ученых
Сочи, 11-20 сентября 2015 г.

РАСКАЧИВАНИЕ КАЧЕЛЕЙ И ТЕОРИЯ БРЭГГОВСКИХ ВОЛНОВОДОВ

А.В. Попов

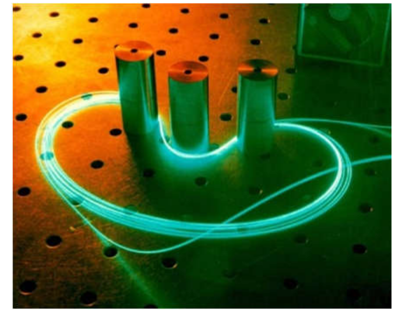
Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова.

42190 Москва, г. Троицк, ИЗМИРАН. popov@izmiran.ru

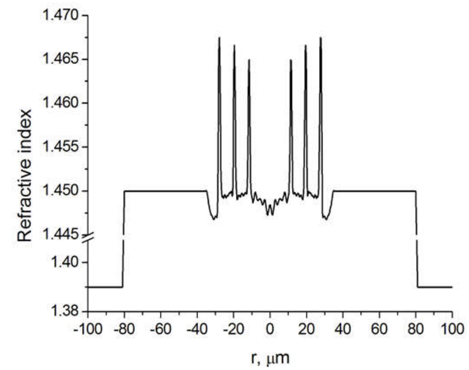
Введение

В последнее десятилетие активно ведется разработка мощных волоконных лазеров ИК диапазона на основе легированных иттербием кварцевых нитей.

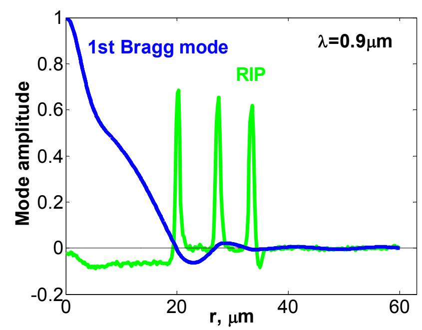
Повышению мощности препятствует порог разрушения кварца порядка 1МВт/см^2, поэтому ключевым элементом дизайна является увеличение диаметра волокна при сохранении одномодового режима генерации.



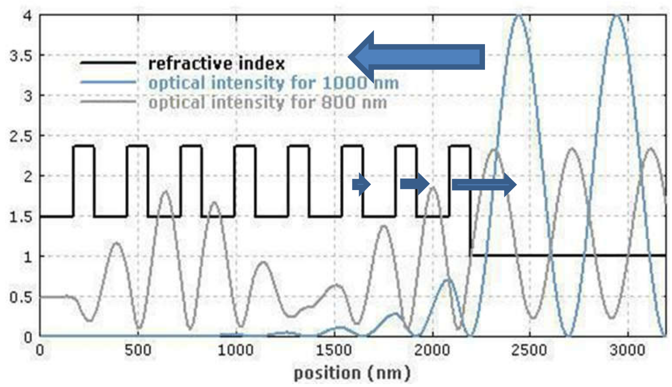
Одним из способов локализации излучения в сердечнике световода является использование квазипериодической модуляции показателя преломления в его оболочке за счет добавления двуокиси германия - Ф. Руа, С. Феврье (Ин-т фотоники, Лимож, Франция), М. Лихачев (НЦВО, Москва).

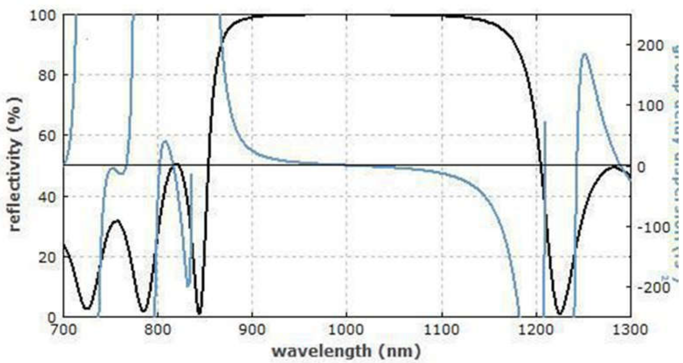


Специально подобранная структура кольцевых слоев приводит к резонансному затуханию поля в оболочке световода, препятствующему вытеканию энергии. Этот эффект, аналогичный брэгговскому отражению в кристаллических решетках, позволяет создавать высокодобротные оптические волокна с большой площадью моды.



Введение





Элементарная теория брэгговских зеркал хорошо известна. Показатель преломления чередующихся диэлектрических слоев рассчитывается так, чтобы френелевские отражения падающей волны на границах раздела складывались в фазе.

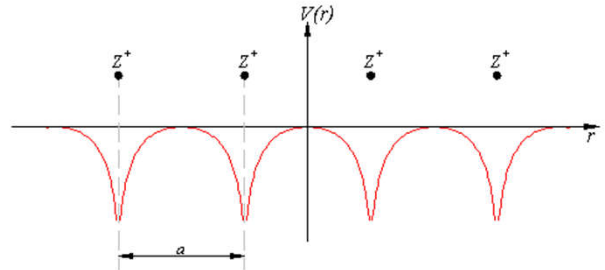
Это приводит к экспоненциальному затуханию поля в полубесконечной периодической структуре и полному отражению падающей волны.

Поскольку фазовый набег зависит от частоты, декремент затухания и коэффициент отражения падает при изменении длины волны, а вне некоторой полосы экспоненциальное затухание сменяется осциллирующим режимом.

При конструировании оболочки брэгговского волновода возникает задача обеспечить максимальное затухание поля в периодической структуре при минимальном числе слоев.

Введение

Для решения возникающей задачи оптимизации обратимся к теории распространения электромагнитных волн в периодических средах. Она аналогична теории блоховских волн в периодическом потенциале:



$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} + V_a(x)\psi(x) = E\psi(x) \qquad V_a(x) = V_a(x+a).$$

Одномерное распространение электромагнитных волн в неоднородной среде с показателем преломления $n(x)$ описывается аналогичным уравнением

$$\boxed{u'' + k^2 n^2(x) u = 0, \quad k = \omega/c}$$

Аналитическое решение одномерного уравнения Шредингера или волнового уравнения известно лишь для ряда модельных потенциалов. В случае периодической зависимости $n(x+\Lambda) = n(x)$ легко строится решение для ступенчатого показателя преломления.

В остальных случаях приходится полагаться на приближенные формулы или численные методы, но теорема Флоке позволяет предсказать общий характер решения:

$$\boxed{\begin{aligned} &u(x) = e^{\mu x} P(x), \\ &P(x+\Lambda) = P(x) \end{aligned}}$$

Введение

По теореме Флоке произведение мультипликаторов двух фундаментальных решений $\rho_{1,2} = \exp(\mu_{1,2}\Lambda)$ равно единице. Возможны два случая:

1. Показатели вещественны и $\rho_2 = 1/\rho_1$ - одно из решений экспоненциально растет, а другое убывает;
2. Показатели чисто мнимы, а мультипликаторы комплексно сопряжены и по модулю равны единице.

Для создания интерференционного зеркала или оболочки брэгговского световода нужно реализовать экспоненциально убывающее решение. Чтобы понять принцип поиска оптимальной конструкции, рассмотрим электро-механическую аналогию.
С точностью до замены переменных одномерное волновое уравнение с неоднородным показателем преломления $n(x)$ эквивалентно уравнению колебаний с переменной собственной частотой $\omega(t)$:

$$\boxed{u'' + k^2 n^2(x) u = 0} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{u'' + \omega^2(t) u = 0}$$

В случае периодического изменения собственной частоты: $\omega(t+T) = \omega(t)$ возникает явление параметрического резонанса – экспоненциальный рост амплитуды колебаний

Введение

Элементарная теория параметрического резонанса показывает, что при малом возмущении параметров осциллятора простой периодической функцией $\omega^2(t) = \omega_0^2\left(1 + h\cos\gamma t\right), \quad h \ll 1$ наиболее интенсивно резонанс возбуждается, если частота модуляции γ близка к удвоенной частоте ω_0: $\gamma = 2\omega_0 + \delta$.

Решение уравнения $\boxed{u'' + \omega_0^2\left(1 + h\cos\gamma t\right)u = 0}$ ищется в виде модулированных колебаний

$$u = A(t)\cos(\omega_0 + \frac{\delta}{2})t + B(t)\sin(\omega_0 + \frac{\delta}{2})t$$

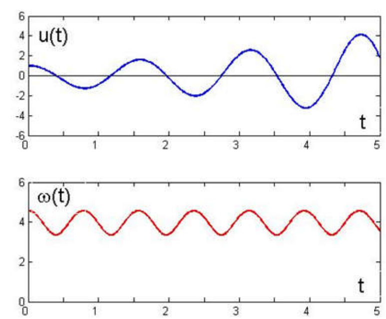
Амплитуды $A(t), B(t)$, в первом приближении по δ, находятся из системы уравнений первого порядка, имеющей решение пропорциональное $\exp(st)$, где

$$\boxed{s = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - \delta^2}}$$

Максимальное усиление на периоде $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ равно $\exp(\dfrac{\pi}{2}h)$

Полоса частот, в которой возникает резонанс: $|\delta| < \dfrac{h\omega_0}{2}$

При другой фазе - убывающее решение $\sim \exp(-st)$.



Введение

Вне рамок теории возмущений нет простой теории для описания квазипериодических решений. Для уравнения Матье развиты численные алгоритмы поиска характеристического показателя μ и периодического множителя $P(t)$.

$$\boxed{u'' + \omega_0^2 \left(1 + h\cos\gamma t\right) u = 0}$$

В реальных задачах при большой глубине модуляции параметры осциллятора меняются более сложным образом. Обратная задача - поиск оптимального режима раскачки мало исследована.

В то же время у нас перед глазами пример эффективного параметрического возбуждения колебаний.

Глядя на ребенка, раскачивающего качели, можно сделать ряд полезных наблюдений:

- ребенок интуитивно находит закон изменения параметров маятника, приводящий к росту амплитуды колебаний;
- он не пользуется часами, а согласует свои движения с текущей фазой колебаний;
- параметры маятника меняются периодически, но не по гармоническому закону

Линейный осциллятор: метод фазового параметра

Определим фазу ангармонических колебаний формулой $\boxed{\psi(t) = \operatorname{arcctg}\dfrac{u'(t)}{\omega(t)u(t)}}$

и будем считать ее независимой переменной, полагая $\omega(t) = \Omega(\psi)$

Ищем параметрическое решение $u = U(\psi), \quad t = T(\psi)$

Уравнение колебаний $\boxed{u'' + \omega^2(t)u = 0}$ сводится к системе нелинейных уравнений

$$\boxed{\dot{T}(\psi) = \frac{1}{\Omega(\psi)} - \frac{\dot{\Omega}(\psi)}{2\Omega^2(\psi)}\sin 2\psi, \quad \frac{\dot{U}(\psi)}{U(\psi)} = \operatorname{ctg}\psi - \frac{\dot{\Omega}(\psi)}{\Omega(\psi)}\cos^2\psi}$$

интегрирующейся в явном виде при произвольной функции $\Omega(\psi)$:

$$\begin{cases} T(\psi) = \int\left(\dfrac{1}{\Omega} - \dfrac{\dot{\Omega}}{2\Omega^2}\sin 2\psi\right)d\psi = t_0 + \dfrac{1}{\bar{\omega}}\int e^{g(\psi)}\left[1 + \dfrac{1}{2}\dot{g}(\psi)\sin 2\psi\right]d\psi \\ U(\psi) = \dfrac{1}{\bar{\omega}}\sin\psi\, \exp[g(\psi)\cos^2\psi + \int\limits_0^{\psi} g(\varphi)\sin 2\varphi\, d\varphi] \end{cases}$$

Для удобства обозначено:

$$\boxed{\Omega(\psi) \equiv \bar{\omega}\ \mathrm{e}^{-g(\psi)}}$$

Периодическая модуляция

Итак, мы получили для *u(t)* явное параметрическое решение $t \equiv T(\psi), \quad u(t) \equiv U(\psi)$

при произвольной зависимости частоты от фазы колебаний $\Omega(\psi) \equiv \bar{\omega} \exp[-g(\psi)]$

$$\begin{cases} T(\psi) = t_0 + \dfrac{1}{\bar{\omega}} \displaystyle\int e^{g(\psi)} \left[1 + \dfrac{1}{2} \dot{g}(\psi) \sin 2\psi \right] d\psi \\ U(\psi) = \dfrac{1}{\bar{\omega}} \sin\psi \, \exp[g(\psi)\cos^2\psi + \displaystyle\int_0^{\psi} g(\varphi) \sin 2\varphi d\varphi] \end{cases}$$

В случае периодического изменения параметра: $g(\psi + \pi) = g(\psi)$ интегралы содержат линейно растущие секулярные члены

Возвращаясь к переменной t, получаем решение Флоке и явные формулы для его периода и инкремента:

$$\boxed{u(t) = \tilde{u}(t)\, e^{\frac{\nu}{\tau} t}, \qquad \tilde{u}(t + 2\tau) = \tilde{u}(t)}$$

$$\boxed{\tau = \frac{2}{\bar{\omega}} \int_0^{\pi} e^{g(\psi)} \sin^2\psi \, d\psi} \qquad \boxed{\nu = \int_0^{\pi} g(\psi) \sin 2\psi \, d\psi}$$

Параметрический резонанс

Метод фазового параметра указывает очень простую связь характеристического показателя Флоке с законом модуляции параметров осциллятора. Разложив $g(\psi)$ в ряд Фурье, получим:

$$\omega(t) \equiv \Omega(\psi) = \bar{\omega}\exp[-g(\psi)]$$

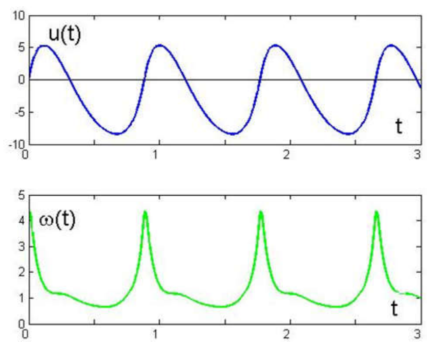
$$g(\psi + 2\pi) = g(\psi)$$

$$g(\psi) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m \cos m\psi + b_m \sin m\psi)$$

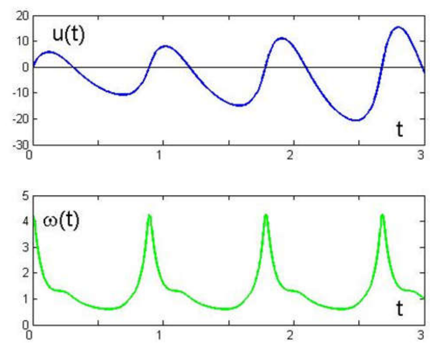
$$\boxed{\nu = \int_0^{\pi} g(\psi)\sin 2\psi \, d\psi = \frac{\pi}{2} b_2}$$

Важна только вторая нечетная гармоника!

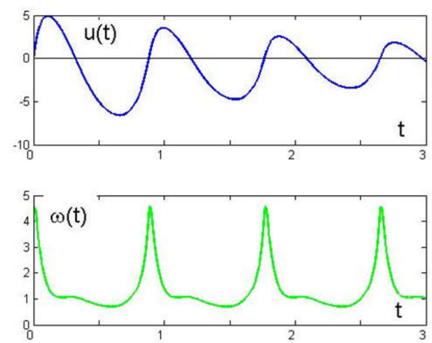
Численный пример: $g(\psi) = \sin\psi + 2\cos\psi + \cos 2\psi + b_2 \sin 2\psi$



$b_2 = 0$



$b_2 = 0.3$



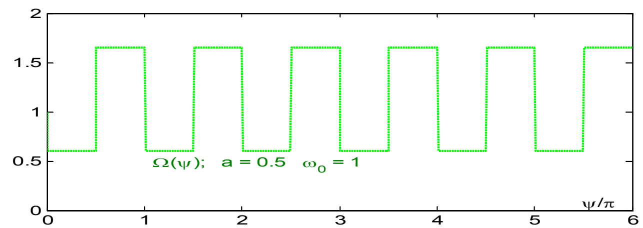
$b_2 = -0.3$

Обратная задача - максимальный инкремент

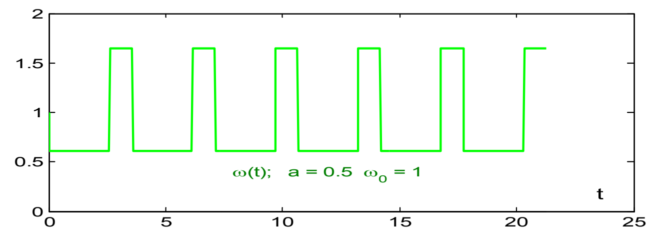
Очевидное неравенство: $$\nu = \int_0^{\pi} g(\psi)\sin 2\psi\, d\psi < \left\{ \max_{0<\psi<\pi/2}[\mathrm{g}(\psi)] - \min_{\pi/2<\psi<\pi}[\mathrm{g}(\psi)] \right\}$$

При заданных пределах изменения собственной частоты максимальный инкремент достигается при ступенчатом изменении параметров на каждой четверти периода:

$$\Omega(\psi) = \omega_0 \exp[-a\,\mathrm{sign}(\sin 2\psi)]$$

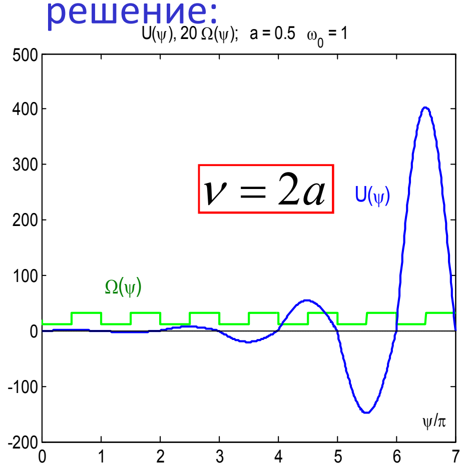


$$\omega(t) = \Omega[\Psi(t)]$$

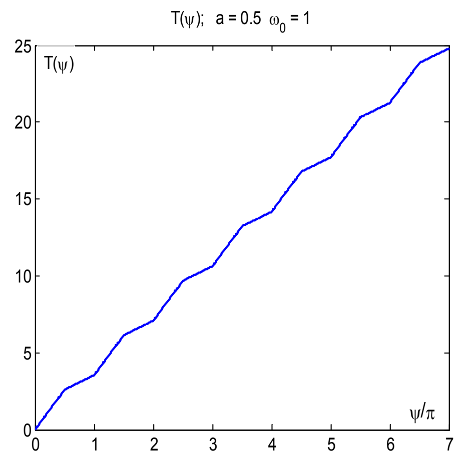


Параметрическое решение:

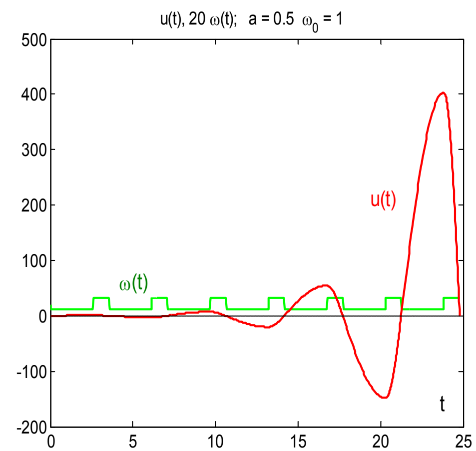
В физических переменных:



$U(\psi)$



$T(\psi)$

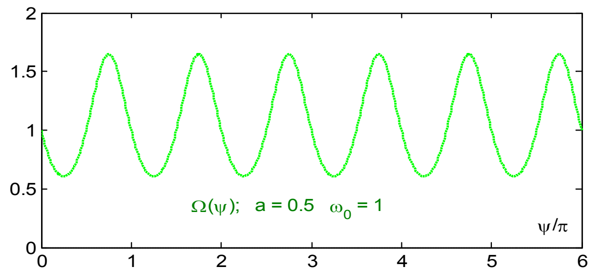


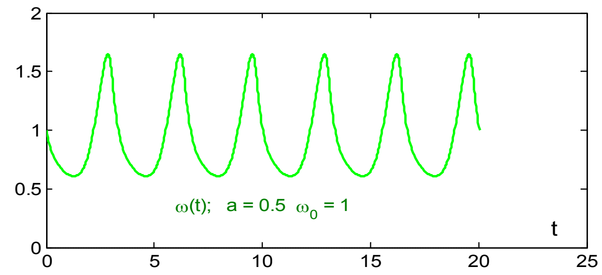
$u(t)$

Оптимальное решение

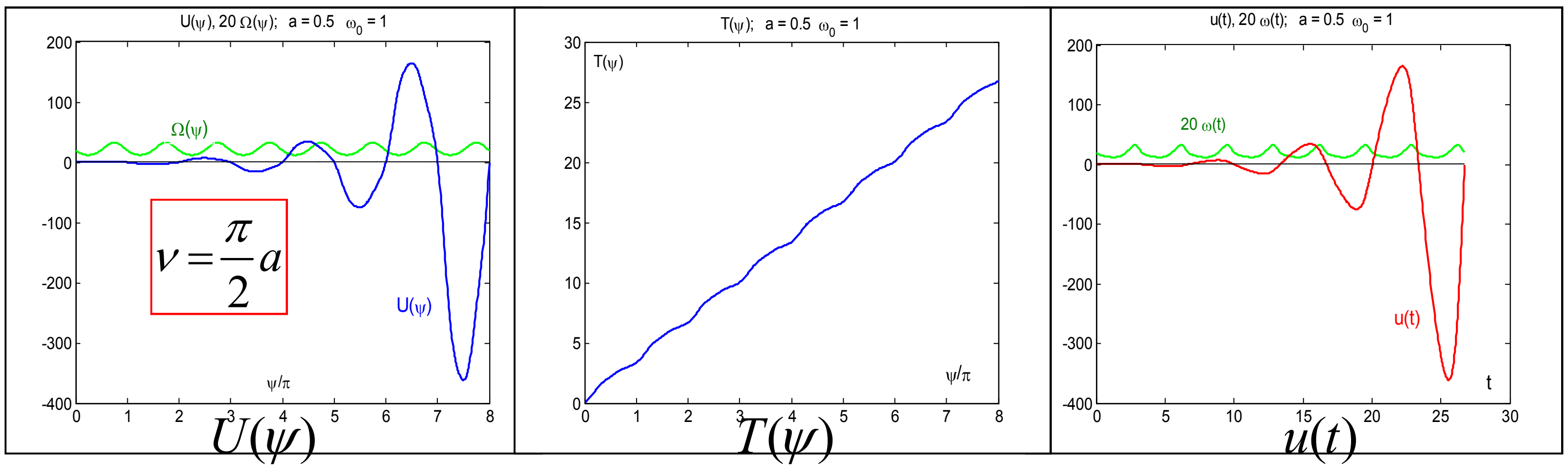
В реальной жизни ступенчатое изменение параметров не реализуется. Оптимальное гладкое решение соответствует единственной гармонике в показателе экспоненты:

$$\boxed{\Omega(\psi) = \omega_0 \exp(-a \sin 2\psi)} \qquad \omega(t) = \Omega[\Psi(t)]$$





$$\boxed{U(\psi) = A \sin\psi \exp\left[\frac{a}{2}\left(\psi + \sin 2\psi + \frac{1}{4}\sin 4\psi\right)\right], \quad T(\psi) = \frac{1}{\omega_0}\int_0^{\psi} e^{a \sin 2\psi}\left(1 + \frac{a}{2}\sin 4\psi\right) d\psi}$$



Промежуточные итоги

- Предложено определение фазы линейных ангармонических колебаний

$$\psi(t) = \operatorname{arcctg} \frac{u'(t)}{\omega(t)u(t)}$$

- Использование фазы в качестве независимой переменной дает аналитическое решение уравнения линейного осциллятора при произвольной зависимости $\omega(t) = \Omega(\psi)$

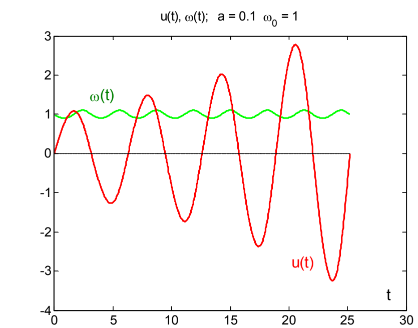
$$u'' + \omega^2(t)u = 0$$

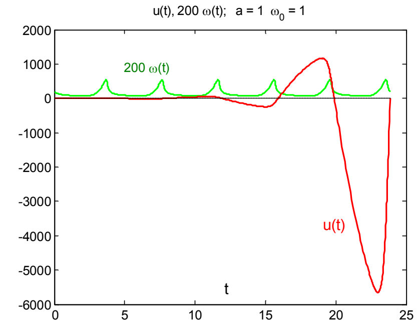
- Найдена явная формула для инкремента параметрических колебаний:

$$\nu \sim \int_0^{\pi} \ln \Omega(\psi) \sin 2\psi \, d\psi$$

- В случае слабой периодической модуляции собственной частоты осциллятора решение согласуется с классической теорией параметрического резонанса

- В случае глубокой модуляции указан оптимальный режим возбуждения резонанса





Нелинейные колебания

Фазовый параметр можно использован для описания нелинейных колебаний.

Рассмотрим нелинейные колебания маятника:

$$u'' + \omega^2(t)\sin u = 0$$

Определим фазу колебаний и ищем параметрическое решение

$$\operatorname{ctg}\psi = \frac{u'}{\omega\, p(u)}, \quad p(u) = 2\sin\frac{u}{2}$$

$$t = T(\psi), \quad \omega\left[T(\psi)\right] = \Omega(\psi),$$

$$u\left[T(\psi)\right] = U(\psi)$$

$$\sin\frac{U(\psi)}{2} = C\sin\psi\,\exp\left[\int_0^{\psi}\dot g(\varphi)\cos^2\varphi\, d\varphi\right],$$

$$T(\psi) = t_0 + \frac{1}{\bar\omega}\int_0^{\psi}\exp[g(\varphi)]\left[1 + \frac{1}{2}\dot g(\varphi)\sin 2\varphi\right]\frac{d\varphi}{\cos\frac{U(\psi)}{2}}$$

Уравнения интегрируются для любой

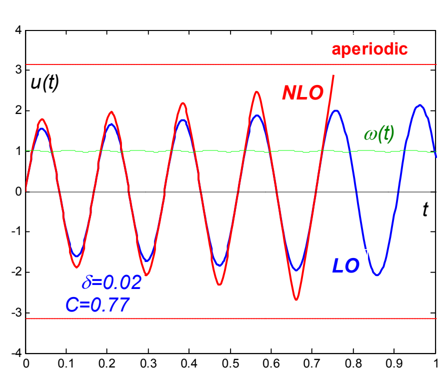
$$\Omega(\psi) = \bar\omega\exp[-g(\psi)]$$

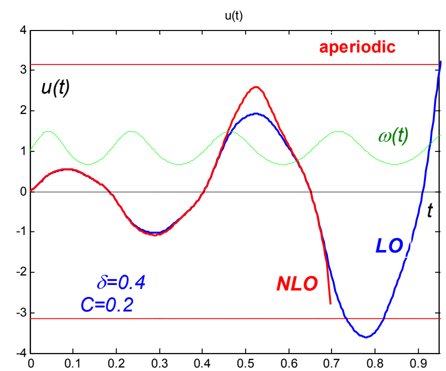
Нелинейная теорема Флоке:

$$\sin\frac{U(\psi+\pi)}{2} = -\sin\frac{U(\psi)}{2}\cdot e^{\nu},$$

$$\nu = \int_0^{\pi} g(\varphi)\sin 2\varphi\, d\varphi$$

Параметрический резонанс линейного и нелинейного осциллятора:





Волны в периодических средах

Результаты, полученные для линейного осциллятора, переносятся на одномерное волновое уравнение заменой переменных

$$E(x,t) = u(x)\exp(-i\omega t)$$

$$u'' + q^2(x)u = 0, \quad q(x) = kn(x), \quad k = \omega/c$$

$$t \to x, \ \ \omega(t) \to q(x)$$

Фазовый параметр:

$$\frac{u'(x)}{q(x)u(x)} = \operatorname{ctg}\psi(x), \quad q(x) = Q(\psi)$$

$$x \equiv X(\psi), \quad u \equiv U(\psi)$$

Нелинейные уравнения

$$\dot{X}(\psi) = \frac{1}{Q(\psi)} - \frac{\dot{Q}(\psi)}{2Q^2(\psi)}\sin 2\psi$$

$$\frac{\dot{U}(\psi)}{U(\psi)} = \frac{u'}{u}\cdot\dot{X} = \operatorname{ctg}\psi - \frac{\dot{Q}(\psi)}{Q(\psi)}\cos^2\psi$$

интегрируются в квадратурах для произвольной $Q(\psi)$:

Для периодической $q(x) = Q(\psi)$ мы получаем аналитическое описание блоховских волн в «запрещенной» зоне

Задачи оптимального синтеза

1. Многослойное зеркало

Цель дизайна – обеспечить максимальный декремент (затухание на периоде)

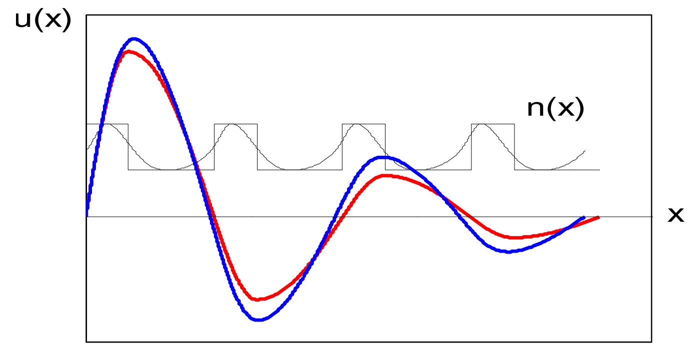
$$\nu = \int_0^{\pi} g(\psi)\sin 2\psi \, d\psi$$ при технологических ограничениях $\boxed{n_2 < n(x) < n_1}$

Решение: $n(x) = \bar{n}\exp[g(\psi)]$

a) $$g(\psi) = \begin{cases} \ln(n_1), & 0 < \psi < \pi/2 \\ \ln(n_2), & \pi/2 < \psi < \pi \end{cases}$$ - идеальная ступенчатая функция, абсолютный максимум: $\nu = \ln\dfrac{n_1}{n_2}$

b) $$g(\psi) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n_1}{n_2}\right)\sin 2\psi$$ - оптимальный гладкий профиль, $\nu = \dfrac{\pi}{4}\ln\dfrac{n_1}{n_2}$

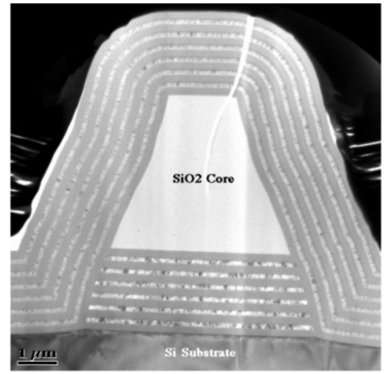
Возвращаясь к переменной x, получаем набор четверть-волновых пластинок и его гладкий аналог



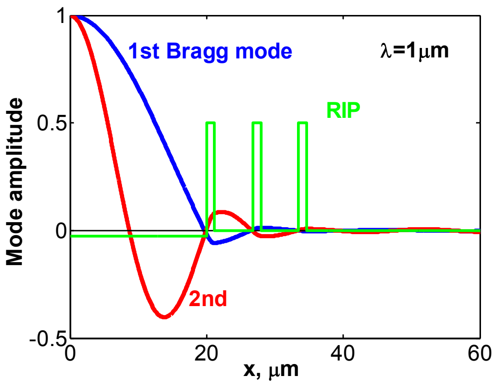
Задачи оптимального синтеза

2. Брэгговский волновод

Аналитическое решение можно использовать для оптимального синтеза брэгговских волноводов.



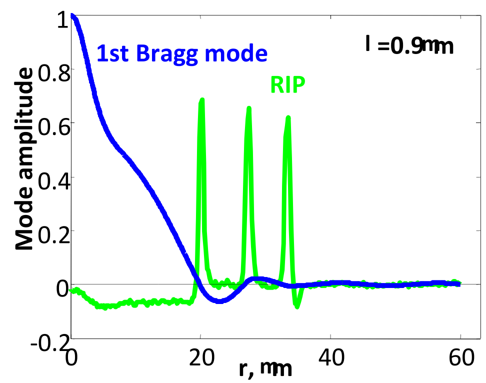
Цель – быстрое затухание поля в оболочке волновода, минимум радиационных потерь



Модельный профиль показателя преломления и две брэгговские моды

Обычно оптимизация осуществляется численными методами, исходя из модели четверть-волновых слоев. Наша теория параметрического антирезонанса дает аналитическое решение

Оболочка реального брэгговского световода *(Ф. Руа, М. Лихачев и др.)* соответствует оптимальному гладкому профилю.



Задачи оптимального синтеза

Модельный пример: плоский брэгговский волновод

Однородный сердечник: n_0

Периодическая оболочка: $n(x)$

Цель: локализация поля в сердечнике

Внешняя оболочка: $\bar{n}$

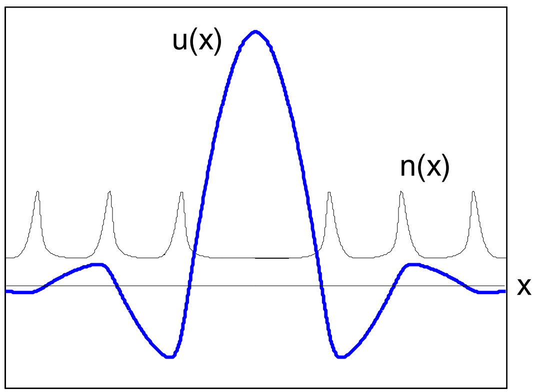
Распространяющаяся мода $E_y = u(x)\exp(-i\beta z)$

Волновое уравнение $u'' + \left[k^2 n^2(x) - \beta^2\right]u = 0$

Параметрическое решение: $q(x) = \sqrt{k^2 n^2(x) - \beta^2} = q_0 \exp\left[\delta\left(\sin 2\psi - \sin 2\psi_0\right)\right]$

$$x = a + \frac{1}{q_0}\int_{\psi_0}^{\psi} e^{\delta\left(\sin 2\psi_0 - \sin 2\varphi\right)}\left(1 - \frac{\delta}{2}\sin 4\varphi\right)d\varphi,$$

$$u(x) = \begin{cases} \cos q_0 x, & x < a \\ -\sin\psi\, e^{-\frac{\delta}{2}\left[(\psi-\psi_0)+(\sin 2\psi - \sin 2\psi_0)+\frac{1}{4}(\sin 4\psi - \sin 4\psi_0)\right]}, \\ x > a \end{cases}$$



Оптимальный профиль показателя преломления и брэгговская мода

Параметрическое описание распространяющихся волн

Для завершения теории, мы должны еще описать распространение волн в зонах прозрачности и частотную зависимость решения. Это оказывается гораздо более сложной задачей.

Не углубляясь в детали, обсудим основные моменты. Как говорилось выше, в зоне прозрачности волновое уравнение $u'' + q^2(x)u = 0$ с периодическим коэффициентом $q(x + \Lambda) = q(x)$ имеет решение Флоке вида $u(x) = e^{\mu x} P(x), \quad P(x + \Lambda) = P(x)$ с чисто мнимым показателем μ

Для описания распространяющихся волн нужно ввести понятие фазы комплексной ангармонической волны. Обобщая предыдущие построения, определим фазу однородной функцией величин $u(x)$ и $u'(x)$:

$$\psi(x) = \frac{1}{2i} \ln \frac{u' + iqu}{u^{*\prime} - iqu^*}$$

$$\sim \int \left[q + \frac{q'}{2} \frac{u\, u^{*\prime} + u' u^*}{|u'|^2 + q^2 |u|^2} \right] dx$$

Для вещественных решений формула сводится

к знакомому выражению $\psi(x) = \operatorname{arcctg}\left(\frac{u'}{qu}\right)$, а в

плавно меняющейся среде получаем фазу ВКБ:

$$u \sim q^{-1/2}(x) \exp\left[i \int q(x) dx \right]$$

$$\psi(x) = \int q(x) dx$$

Интегрирование волнового уравнения

Наша задача – описать распространение волн в периодической среде вне рамок теории возмущений

Чтобы проинтегрировать волновое уравнение в переменных $X(\psi), U(\psi)$, вводим комплексный адмитанс

$$\boxed{H(\psi) = \frac{u'[x(\psi)]}{u[x(\psi)]} \equiv \frac{\dot{U}(\psi)}{\dot{X}(\psi)U(\psi)}}$$

$$H(\psi) = Q\rho\,\exp(i\Phi)$$

Амплитуда и фаза адмитанса удовлетворяют системе нелинейных дифференциальных уравнений

$$\boxed{\begin{aligned} &\dot{\rho}\cos\Phi + \frac{\rho^2+1}{\rho^2-1}\rho\,\dot{\Phi}\sin\Phi = -\left(\rho^2+1\right) \\ &\dot{\rho}\sin\Phi - \frac{\rho^2+1}{\rho^2-1}\rho\,\dot{\Phi}\cos\Phi = -\rho\frac{\dot{Q}}{Q}\sin\Phi \end{aligned}}$$

Замена $\rho(\psi) = \sqrt{\dfrac{1+\dot{I}(\psi)}{1-\dot{I}(\psi)}}, \quad Q(\psi) = k\,n_0\exp[g(\psi)]$

приводит к нелинейному уравнению второго порядка

$$\boxed{\ddot{I} + 4I = \dot{g}(\psi)\left(\dot{I}^2 + 4I^2 - 1\right)}$$

континуум решений которого можно найти, полагая $\boxed{\dot{g}(\psi) = M'(I)/M(I)}$

Интегрирование нелинейного уравнения

При $\dot{g}(\psi) = M'(I)/M(I)$ интеграл энергии $\boxed{\dot{I}^2 = 1 - 4I^2 - M^2.(I)}$

Периодическое решение $I(\psi) = I(\psi + \Theta)$ получается обращением интеграла

$$\boxed{\psi = \pm\int \frac{dI}{\sqrt{1 - 4I^2 - M^2(I)}}}$$

Период $\Theta = 2\int\limits_{I^-}^{I^+} \frac{dI}{\sqrt{1 - 4I^2 - M^2(I)}}$ находится интегрированием между точками поворота $I^{\pm}$.

Коэффициент $Q(\psi) = k\, n_0 \exp[g(\psi)]$ и параметрическое решение выражаются через заданную функцию $M(I)$:

$$\boxed{g(\psi) = \pm\int \frac{M'(I)\,dI}{M(I)\sqrt{1 - 4I^2 - M^2(I)}}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} X(\psi) &= -\int \frac{\dot{H}}{H^2 + Q^2}\, d\psi = \int \left(1 - I\,\frac{M'(I)}{M(I)}\right)\frac{d\psi}{Q}, \\ U(\psi) &= U_0 \exp\left(-\int \frac{H\dot{H}}{H^2 + Q^2}\, d\psi\right) = U_0 \exp\left[\int \left(1 - I\,\frac{M'}{M}\right)\frac{(2I + iM)}{Q}\, d\psi\right] \end{aligned}}$$

Параметры блоховской волны

Комплексный инкремент $\chi + i\nu = \ln\dfrac{U(\psi+\Theta)}{U(\psi)} = 2\int_{\bar{I}}^{\overset{+}{I}} \dfrac{M(I) - IM'(I)}{4I^2 + M^2(I)}\left(\dfrac{2I}{M(I)} + i\right)dI$

Для четной $\boxed{M(I) = M(-I)}$ имеем: усиление $\chi = 0$ (периодический $|U(\psi)|$)

Набег фазы: $\nu = 4\int_0^{\overset{+}{I}} \dfrac{M(I) - IM'(I)}{4I^2 + M^2(I)} \dfrac{dI}{\sqrt{1 - 4I^2 - M^2(I)}}$; период модуляции: $T = \dfrac{2\pi}{\nu}\Theta$

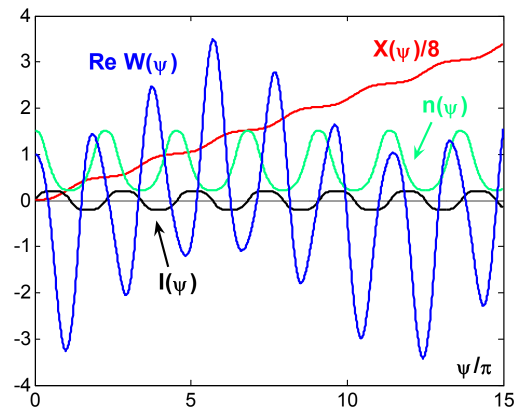
Численный пример:

$$\boxed{M(I) = \sqrt{1 - 4a^2 - c^2 I^4}}$$

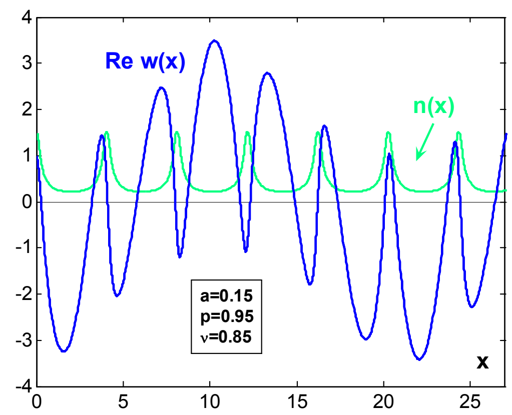
$$I(\psi) = a\sqrt{1+\rho^2}\,\mathrm{sn}\left(\frac{2\psi}{\sqrt{1+\rho^2}}, \rho\right),$$

$$\rho = \frac{1 - \sqrt{1 - a^2c^2}}{ac}$$

Параметрическое решение:



В физических переменных:



Частотная зависимость

Осталось описать частотную зависимость решений волнового уравнения

$$u'' + k^2 n^2(x) u = 0, \quad k = \omega / c$$

Трудность параметризации состоит в необходимости обеспечить постоянство профиля показателя преломления:

$$X(\psi) = X(\psi, k), \;\; U(\psi) = U(\psi, k)$$

$$N(\psi, k) = \overline{n} \exp\left[g(\psi, k)\right] \equiv n(x)$$

Это накладывает ограничение на модельную функцию $g(\psi, k)$ - нелинейное ДУ в ЧП

$$\boxed{\left(\frac{\chi g_\chi}{\dot g}\right)^{\cdot} + 1 = \chi g_\chi \cos 2\psi + \frac{1}{2}\dot g \sin 2\psi}$$

$$\boxed{\chi = k / k_0, \quad \cdot = \partial / \partial \psi}$$

Общее решение неизвестно.
В небольшом диапазоне частот находим приближенное решение

$$\boxed{g(\psi, k) = g_0\left\{\frac{k_0}{k}\left[\psi + \alpha(k)\right]\right\}, \quad \alpha(k_0) = 0}$$

В общем случае применяем метод характеристик: ищем изолинию т. ч.

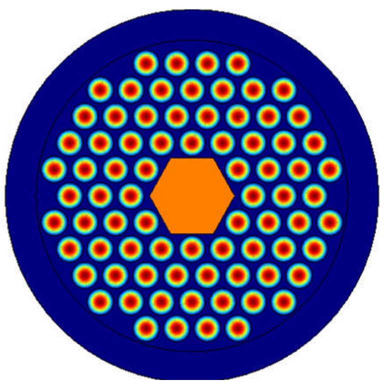
$$\boxed{\Psi = \Psi(\varphi, k), \quad g\left[\Psi(\varphi, k)\right] = g_0(\varphi)}$$

Возникает ОДУ на торе:

$$\boxed{\dot\Psi(\varphi) = \chi + \frac{1}{2}\dot g_0(\varphi)\left(\sin 2\Psi - \chi \sin 2\varphi\right)}$$

Заключение

- Использование фазы в качестве независимой переменной позволяет получить ряд аналитических результатов в теории линейных и нелинейных колебаний4
- По аналогии получаем аналитическое описание электромагнитных волн в неоднородных средах;
- Явные формулы для периода и инкремента параметрических колебаний полезны для решения задач оптимального синтеза;
- Необходимо дальнейшее развитие теории для описания частотной зависимости блоховских волн;
- Возможно обобщение на случай двумерных фотонных кристаллов



Спасибо за внимание!