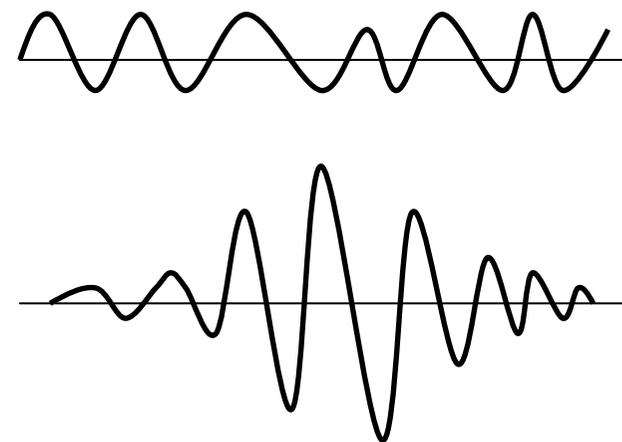
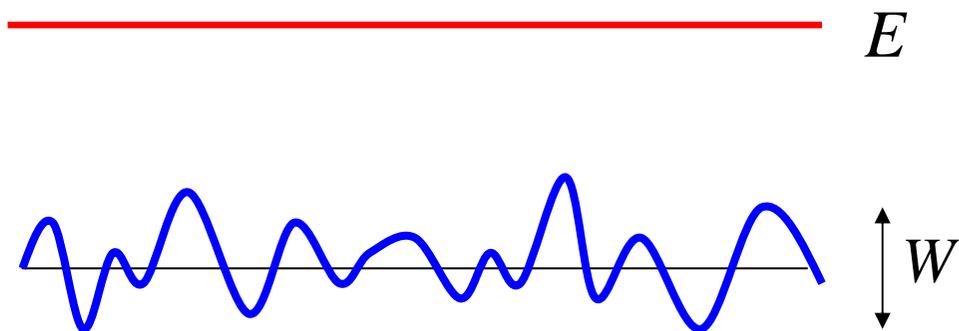


# Скейлинг для статистики уровней вблизи перехода Андерсона

И.М.Суслов

Институт физических проблем им. П.Л.Капицы РАН

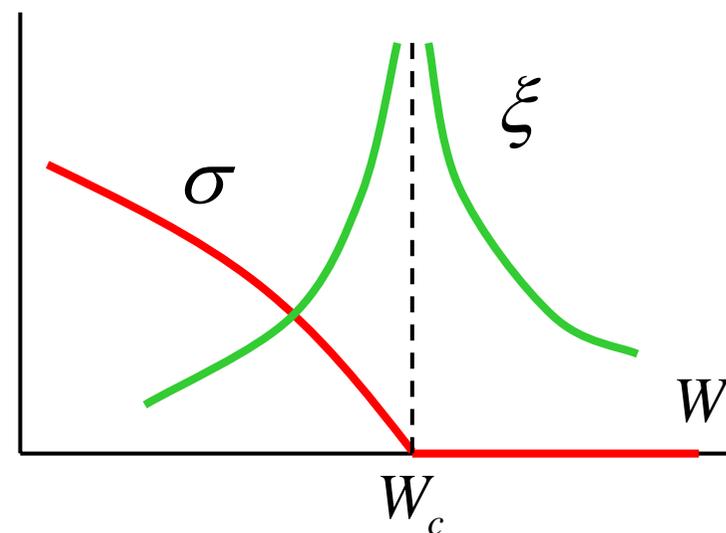
# Переход Андерсона



$$\sigma \sim \tau^s$$

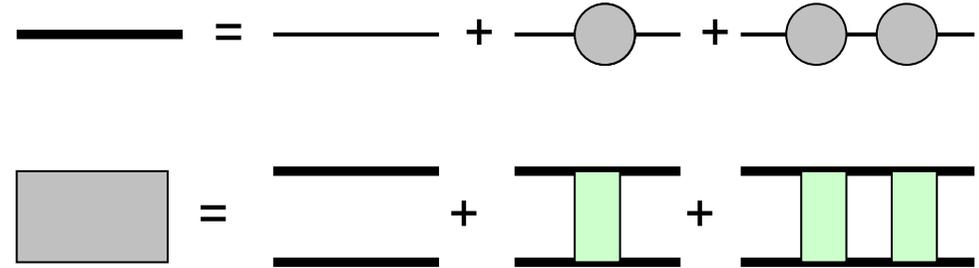
$$\xi \sim |\tau|^{-\nu}$$

$$\tau \propto W_c - W$$



# Самосогласованная теория Вольхардта-Вольфле

Основана на существовании  
диффузионного полюса  
в неприводимой  
четырёххвостке



$$U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\mathbf{q}) = U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{reg}(\mathbf{q}) + \frac{F(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q})}{-i\omega + D(\omega, \mathbf{k} + \mathbf{k}')(\mathbf{k} + \mathbf{k}')^2}$$

играющей роль вероятности перехода  $W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$  в квантовом кинетическом уравнении.

Аппроксимация типа  $\tau$ -приближения  $D \sim \langle U \rangle^{-1}$  дает уравнение самосогласования

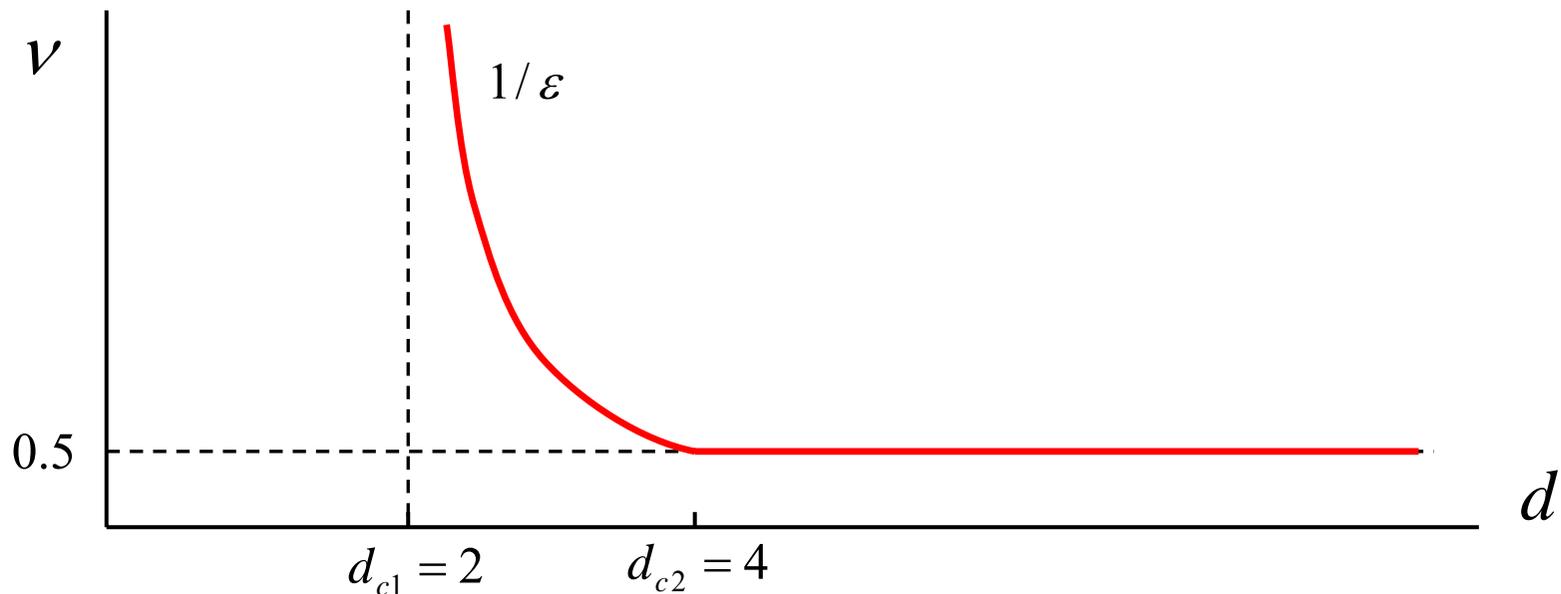
$$D \sim \left[ U_0 + F_0 \int \frac{d^d q}{-i\omega + D(\omega, \mathbf{q})q^2} \right]^{-1}$$

## Полученное уравнение самосогласования

$$\frac{E^2}{W^2} = \frac{D}{D_{min}} + \Lambda^{2-d} \int_{|q| < \Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(-i\omega/D) + q^2}$$

описывает всю физику перехода Андерсона и дает результаты для критических индексов

$$\nu = \begin{cases} 1/(d-2), & 2 < d < 4 \\ 1/2, & d > 4 \end{cases}, \quad s = 1, \quad 2 < d < \infty$$



Гипотеза о том, что результаты теории Вольхардта-Вольфле являются точными:

H. Kunz, R. Souillard, J. de Phys. Lett. **44**, L506 (1983).

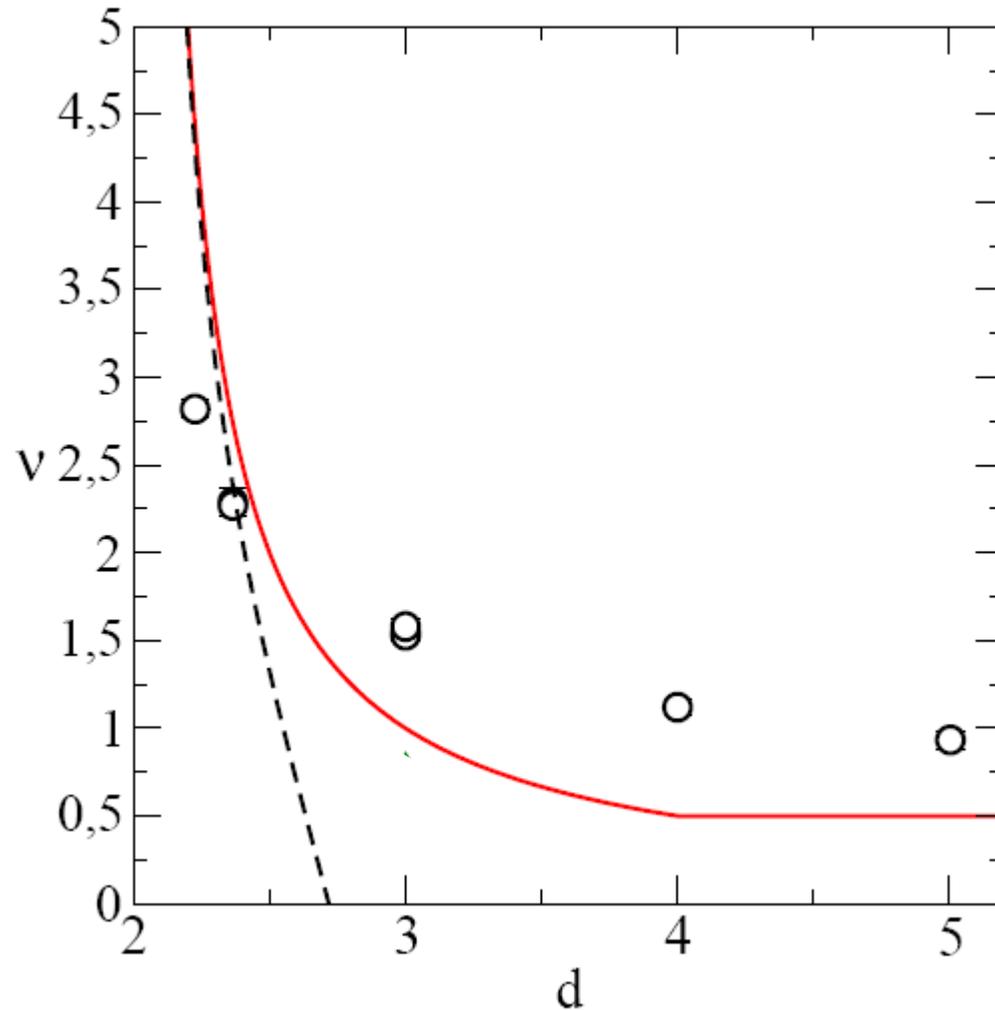
Вывод без грубых аппроксимаций:

И. М. Суслов, ЖЭТФ **108**, 1686 (1995).

По характеру изменения симметрии переход Андерсона аналогичен ферромагнетику с бесконечным числом компонент, для которого критические индексы известны точно. Они совпадают с результатами Вольхардта-Вольфле.

## Ситуация с численным счетом

P. Markos,  
acta physica slovac 56, 561 (2006)



$$\xi \sim |\tau|^{-\nu}$$

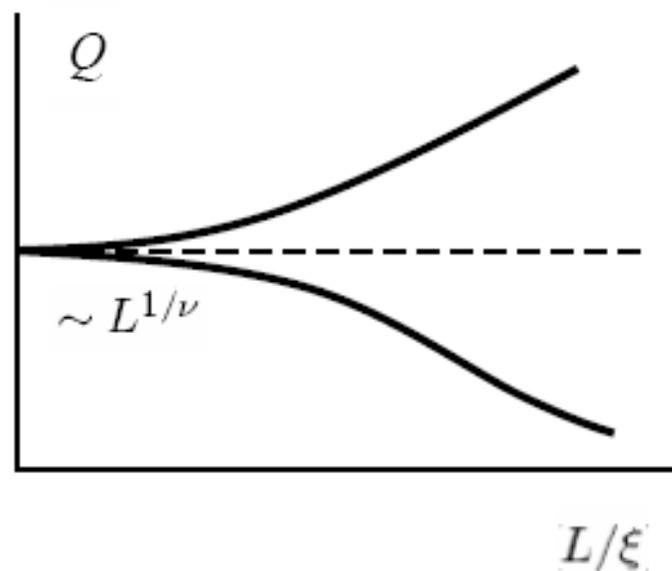
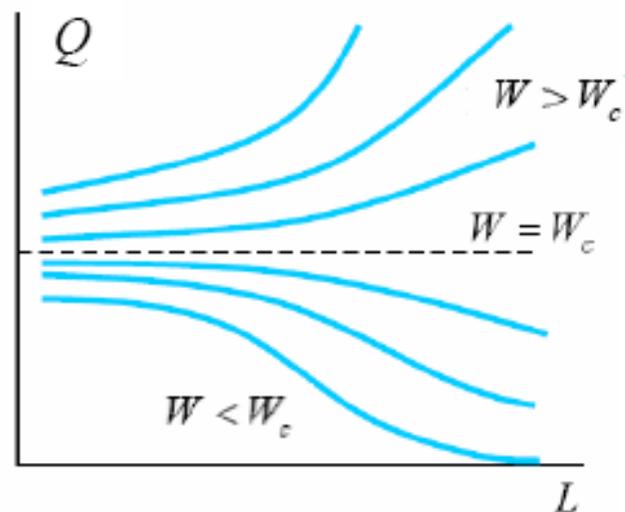
Сопоставление теории  
Вольхардта-Вольфле  
с численными данными

## Конечно-размерный скейлинг

$$Q = F\left(\frac{L}{\xi}\right)$$

Скейлинговое соотношение справедливо не для всех величин, к нему есть поправки, и оно заведомо неверно в высоких размерностях.

Приоритет первичных данных.



## Различные варианты конечно-размерного скейлинга

$$Q = F \left( \frac{L}{\xi} \right)$$

- + 1. Квазиодномерные системы
- + 2. Статистика уровней
- + 3. Средний кондактанс
- 4. Распределение кондактансов
- + 5. Inverse participation ratios

P. Markos,  
acta physica slovaca 56, 561 (2006);

## Статистика уровней: численный алгоритм

Функцию распределения  $P(\omega)$  для расстояния  $\omega$  между ближайшими уровнями удобно рассматривать в терминах переменной  $s$ ,

$$s = \omega / \Delta$$

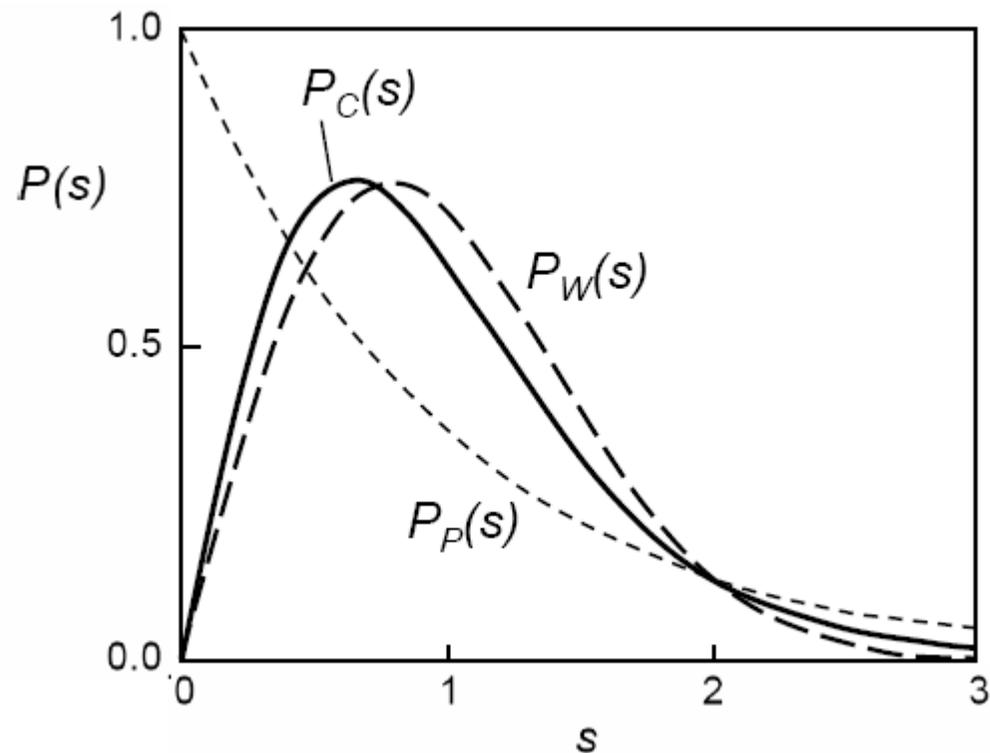
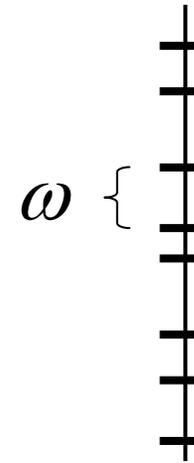
где  $\Delta = 1/\nu_F L^d$  – среднее расстояние между уровнями.

Актуальны три базовых распределения:

$$P_P(s) = \exp(-s),$$

$$P_W(s) = \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4}s^2\right),$$

$$P_c(s) = \begin{cases} \sim s, & s \ll 1 \\ \sim \exp(-s/2\kappa), & s \gg 1 \end{cases}$$



Для количественного контроля эволюции распределения можно рассмотреть интеграл

$$I(s_0) = \int_{s_0}^{\infty} P(s) ds$$

и ввести скейлинговый параметр:

$$\alpha(s_0) = \frac{I(s_0) - I_W(s_0)}{I_P(s_0) - I_W(s_0)}$$

для которого постулируется скейлинговое соотношение:

$$\alpha = F(L/\xi)$$

Аналогично можно рассмотреть интеграл  $\tilde{I}(s_0) = \int_0^{s_0} P(s) ds$

и ввести скейлинговый параметр  $\tilde{\alpha}(s_0)$ , формально совпадающий с  $\alpha(s_0)$ . Обычно используются  $s_0=2.002$  и  $s_0=0.473$ .

Еще одним вариантом скейлингового параметра является коэффициент  $A$  в зависимости

$$I(s) = \exp(-As)$$

стремящийся к постоянному пределу при  $s \rightarrow \infty$ .

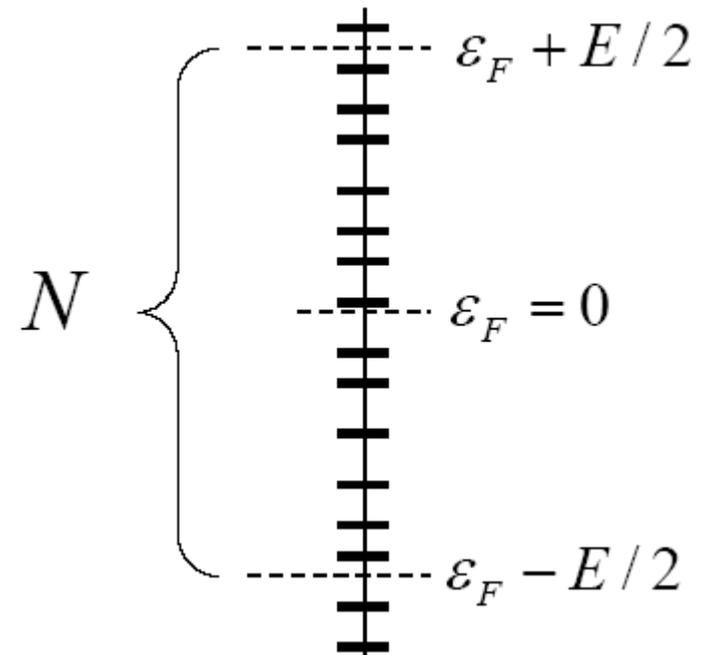
Более сложные скейлинговые параметры используются при  $d=2$  и  $d=4$ .

## Квазигауссовская концепция

Б. Л. Альшuler, И. Х. Жарекешев, С. А. Коточигова,  
Б. И. Шкловский, ЖЭТФ **94**, 343 (1988).

Пусть  $N$  – число уровней в интервале  $E$   
вблизи  $\varepsilon_F$ . В предположении гауссовских  
Флуктуаций

$$P(N) \sim \exp \left\{ -\frac{(N - \langle N \rangle)^2}{2\sigma^2} \right\}$$



Вероятность того, что в интервале  $E$  нет уровней, получается при  $N=0$  и соответствует величине  $I(s_0)$  с  $s_0 = E/\Delta$  :

$$I(s_0) \sim \exp \left( -\frac{s_0^2}{2\sigma(s_0)^2} \right)$$

Чтобы воспроизвести результаты для трех распределений

$$P_W(s) = \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4}s^2\right),$$

$$P_P(s) = \exp(-s),$$

$$P_c(s) = \begin{cases} \sim s, & s \ll 1 \\ \sim \exp(-s/2\kappa), & s \gg 1 \end{cases}$$

нужно положить

$$\sigma_W(s)^2 = 2/\pi, \quad \sigma_P(s)^2 = s/2, \quad \sigma_c(s)^2 = \kappa s$$

Прямое же вычисление среднеквадратичной флуктуации

$$\sigma_0^2 = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2$$

дает

$$(\sigma_0^2)_W = (2/\pi^2) \ln s, \quad (\sigma_0^2)_P = s, \quad (\sigma_0^2)_c = \kappa_0 s$$

Таким образом

$$\sigma^2 \sim \sigma_0^2$$

а  $\sigma_0^2$ : вычисляется из диаграммной техники.

Для скейлинговых параметров имеем:

$$\alpha(s_0) = \exp \left\{ -\frac{s_0^2}{2\sigma_P^2} + \frac{s_0^2}{2\sigma^2} \right\} = \exp \left\{ -s_0 \frac{\sigma_P^2 - \sigma^2}{\sigma^2} \right\}$$

$$A = \frac{s}{2\sigma^2} = \frac{\sigma_P^2}{\sigma^2}$$

т.е они выражаются через одну комбинацию  $\sigma^2/\sigma_P^2$  .

## Диаграммный анализ $\sigma_0^2$

Б. Л. Альтшулер, Б. И. Шкловский, ЖЭТФ **91**, 220 (1986).

Число уровней  $N$  в интервале  $E$  выражается через точную плотность состояний  $\nu(\epsilon)$  конечной системы

$$N = L^d \int_{-E/2}^{E/2} \nu(\epsilon) d\epsilon, \quad \nu(\epsilon) = L^{-d} \sum_n \delta(\epsilon - \epsilon_n),$$

тогда как его среднеквадратичная флуктуация

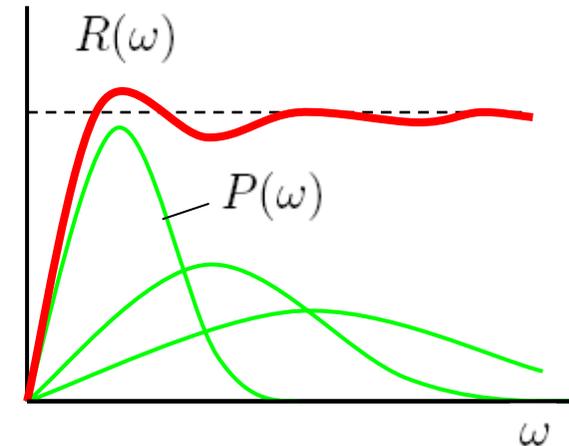
$$\sigma_0^2 = L^{2d} \int_{-E/2}^{E/2} d\epsilon_1 \int_{-E/2}^{E/2} d\epsilon_2 K(\epsilon_1, \epsilon_2)$$

определяется коррелятором

$$K(\epsilon_1, \epsilon_2) = \langle \nu(\epsilon_1) \nu(\epsilon_2) \rangle - \langle \nu(\epsilon_1) \rangle \langle \nu(\epsilon_2) \rangle$$

В литературе обычно рассматривается величина  $R(\omega)$ , просто связанная с  $K(\epsilon_1, \epsilon_2)$

$$R(\omega) = \frac{\langle \nu(E + \omega) \nu(E) \rangle}{\langle \nu \rangle^2} = \frac{K(E + \omega, E)}{\langle \nu \rangle^2} + 1$$



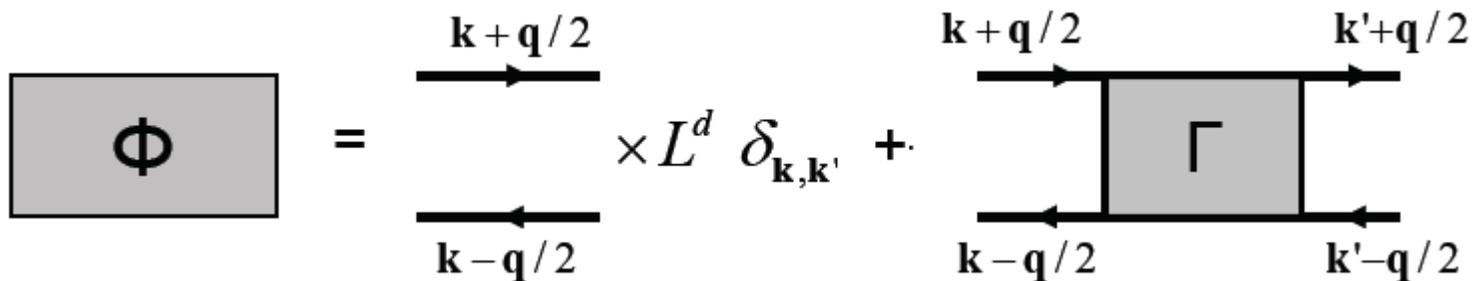
Величина  $R(\omega)$  выражается через двухчастичные функции Грина

$$R(\omega) = \frac{\Delta}{2\pi^2 v_F} \operatorname{Re} \frac{1}{L^{2d}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} [\Phi_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{RA}(\mathbf{q}) - \Phi_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{RR}(\mathbf{q})]$$

где  $\Phi_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{RA}(\mathbf{q})$  – фурье-образ величины

$$\Phi^{RA}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) = \langle G_{E+\omega}^R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) G_E^A(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \rangle$$

Вводя полную вершину  $\Gamma$  :



получим

$$R(\omega) = 1 + \frac{\Delta}{2\pi^2\nu_F} \operatorname{Re} L^{-2d} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} P_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) \Gamma_{\mathbf{k}\mathbf{k}}^{RA}(\mathbf{q}) P_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})$$

$$P_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = G_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}^R G_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}^A$$

Если вершина  $\Gamma^{RA}$  регулярна, то переходя от суммирования к интегрированию

$$L^{-d} \sum_{\mathbf{k}} \dots \longrightarrow \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \dots$$

получим выражение, исчезающее в термодинамическом пределе.

Но вершина  $\Gamma^{\text{RA}}$  содержит диффузоны и купероны:

$$\Gamma_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{(D)}(\mathbf{q}) = \text{wavy line } D = \text{dashed line} + \text{dashed box} + \text{dashed box with vertical lines} + \dots = \frac{C}{-i\omega + D_0 q^2}$$

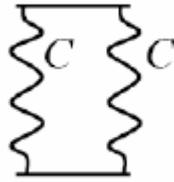
$$\Gamma_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{(C)}(\mathbf{q}) = \text{wavy line } C = \text{dashed line} + \text{dashed X} + \text{dashed X with vertical lines} + \dots = \frac{C}{-i\omega + D_0 (\mathbf{k} + \mathbf{k}')^2}$$

Фиксация одного импульса дает  $L^{-d}$ . Если зафиксировав  $(n-1)$  импульсов, удастся занулить импульсную часть в  $n$  диффузионных знаменателях, то возникает вклад

$$\Delta^n / \omega^n = 1/s^n$$

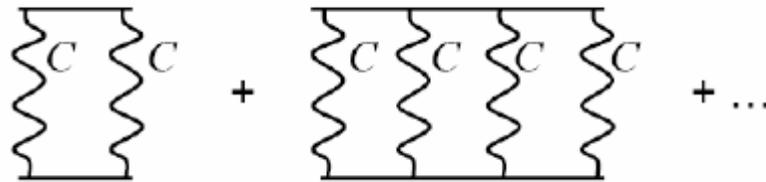
конечный в термодинамическом пределе.

Простейшая существенная диаграмма – двухкуперонная:



$$\Gamma_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{CC}(\mathbf{q}) \sim L^{-d} \sum_{\mathbf{k}_1} \frac{1}{-i\omega + D_0(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1)^2} P_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{q}) \frac{1}{-i\omega + D_0(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}')^2}$$

– дает вклад  $1/s^2$ . Вклады  $1/s^{2n}$  дают в частности диаграммы с  $2n$  куперонами:



Диаграммы с двумя волнистыми линиями дают

$$R(s) = 1 - \frac{1}{\pi^2 s^2} \quad (1)$$

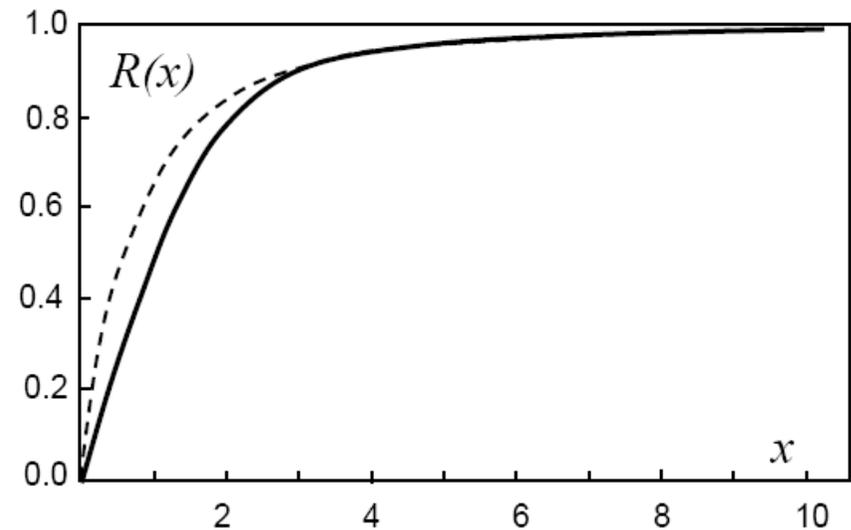
что является началом разложения по  $1/s$ . Учет всех диаграмм должен приводить к воспроизведению результата Ефетова ( $x = \pi s$ ):

$$R(x) = 1 - \frac{\sin^2 x}{x^2} + \frac{\sin x - x \cos x}{x^2} \int_1^\infty \frac{\sin xt}{t} dt =$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{6} x, & x \ll 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1 + \cos^2 x}{x^4}, & x \gg 1 \end{cases},$$

Суммирование куперонной лестницы дает

$$R(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2} \sqrt{1+t^2+4x^{-2}}}$$



Значение  $R(s)$  при  $s=0$  получается из (1) при  $s \sim 1$ .

## Результаты Альтшулера-Шкловского

$$K(\epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{1}{\pi^2 L^{2d}} \operatorname{Re} \sum_{\mathbf{q}} \left( \frac{1}{-i\omega + \gamma + D_0 q^2} \right)^2, \quad \omega = \epsilon_1 - \epsilon_2$$

Для  $L \ll L_E = (D_0/E)^{1/2}$  достаточно члена с  $q=0$  :

$$K(\epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{1}{\pi^2 L^{2d}} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{-i\omega + \gamma} \right)^2 \longrightarrow \sigma_0^2 = \frac{1}{\pi^2} \ln \frac{E^2 + \gamma^2}{\gamma^2}$$

При  $L \gg L_E$  можно перейти от суммирования к интегрированию:

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{\pi^2} \sum_{\mathbf{q}} \ln \left[ 1 + \frac{E^2}{(\gamma + D_0 q^2)^2} \right] = a_d \left( \frac{L}{L_E} \right)^d, \quad a_d = \frac{K_d}{\pi d \sin(\pi d/4)}$$

– система разбивается на квазинезависимые блоки размера  $L_E$ .

## Смысл введения затухания $\gamma$

При  $\gamma \sim \Delta$  результат Альтшулера-Шкловского переходит в результат Дайсона

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{\pi^2} \ln \frac{E^2 + \gamma^2}{\gamma^2} \quad \longrightarrow \quad \sigma_0^2 = \frac{2}{\pi^2} \ln \langle N \rangle$$

Причина в том, что

$$K(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{\pi^2 L^{2d}} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{-i\omega + \gamma} \right)^2 = \frac{v_F^2}{\pi^2} \operatorname{Re} \left( \frac{\Delta}{-i\omega + \gamma} \right)^2$$

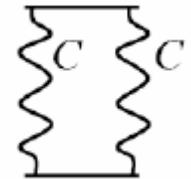
является первым членом разложения по  $\Delta/\gamma$  и верно при  $\gamma \gtrsim \Delta$ , тогда как при  $\gamma \lesssim \Delta$  зависимость от  $\gamma$  практически отсутствует.

# Использование самосогласованной теории

Э. З. Кучинский, М. В. Садовский, ЖЭТФ **98**, 634 (1990).

Область применимости результатов можно расширить, если в выражении

$$K(\epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{1}{\pi^2 L^{2d}} \operatorname{Re} \sum_{\mathbf{q}} \left( \frac{1}{-i\omega + \gamma + D_0 q^2} \right)^2, \quad \omega = \epsilon_1 - \epsilon_2$$



заменить  $D_0$  на точный коэффициент диффузии  $D(\omega)$  :

$$K(\epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{k_\sigma v_F^2}{\pi^2} \operatorname{Re} \sum_{\mathbf{q}} \left[ \frac{\Delta}{-i\omega + D(\omega) q^2} \right]^2$$



$$U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{RA}(\mathbf{q}) = U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{reg}(\mathbf{q}) + \frac{F(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q})}{-i\omega + D(\omega)(\mathbf{k} + \mathbf{k}')^2}$$

В конечной закрытой системе коэффициент диффузии имеет локализационный характер

$$D(\omega) = (-i\omega)\xi_{0D}^2$$

так что

$$K(\epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{k_\sigma \nu_F^2}{\pi^2} \operatorname{Re} \frac{\Delta^2}{(-i\omega + \gamma)^2} F(\xi_{0D}/L)$$

где

$$F(x) = \sum_{\mathbf{s}} \left[ \frac{1}{1 + (2\pi x \mathbf{s})^2} \right]^2 = \begin{cases} 1 + O(1/x^4), & x \gg 1 \\ \tilde{c}_d/x^d, & x \ll 1 \end{cases}$$

(вектор  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d)$  имеет целочисленные компоненты  $s_i = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ )  
Тогда

$$\sigma_0^2 = \frac{k_\sigma}{\pi^2} \ln \frac{E^2 + \gamma^2}{\gamma^2} F(\xi_{0D}/L)$$

## Выражение

$$K(\epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{k_\sigma \nu_F^2}{\pi^2} \operatorname{Re} \frac{\Delta^2}{(-i\omega + \gamma)^2} F(\xi_{0D}/L) \quad (1)$$

есть первый член разложения по  $\Delta/\gamma$  и существуют вклады

$$\left[ \frac{\Delta^2}{\gamma^2} F(\xi_{0D}/L) \right]^n$$

со всеми  $n$ . Минимальное допустимое  $\gamma$  имеет вид

$$\frac{\gamma_{min}^2}{\Delta^2} \sim F(\xi_{0D}/L)$$

и значение (1) при  $\gamma = 0$  можно оценить, полагая  $\gamma \sim \gamma_{min}$ .

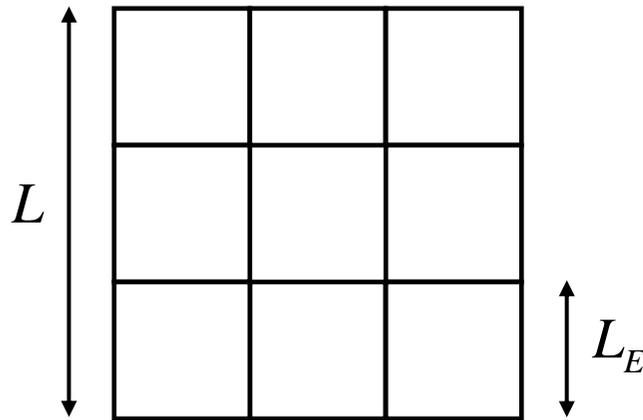
При интегрировании по  $\omega$  существенна частотная зависимость  $\xi_{0D}$ , что приводит к дополнительному вкладу  $\sim E^2$  в величину  $\gamma^2$ :

$$\gamma^2 = k_1 E^2 + k_2 \gamma_{min}^2$$

## Результат

$$\sigma_0^2 = a_d \left( L / L_E \right)^d, \quad L \gg L_E$$

соответствует разбиению системы на квазинезависимые блоки.



$$L_E = (D_0 / E)^{1/2}$$

Открытость блока приводит к диффузионному затуханию  $\gamma_D = D_0 / L_E^2 = E$ , к которому добавляются неупругое затухание  $\gamma$ . Складываются квадраты, т.к. формально это происходит из

$$\text{Re} (-i\omega + \gamma) \sim (\omega^2 + \gamma^2)^{1/2}, \quad \omega \sim E$$

В результате

$$\sigma_0^2 = \frac{k_\sigma}{\pi^2} F(\xi_{0D}/L) \ln \frac{s^2 + k_1 s^2 + k_2 F(\xi_{0D}/L)}{k_1 s^2 + k_2 F(\xi_{0D}/L)}$$

При движении вглубь локализованной фазы  $F(\xi_{0D}/L) \rightarrow \infty$  и  $\sigma_0^2$  выходит на константу, которой выбором  $k_2 = k_\sigma s / \pi^2$  можно обеспечить пуассоновское значение  $\sigma_P^2 = s$ .

Это дает первое скейлинговое уравнение

$$\frac{\sigma_0^2}{\sigma_P^2} = u \ln \frac{1 + k_1 + u}{k_1 + u}, \quad u = \frac{k_\sigma}{\pi^2 s} F(1/z), \quad z = L/\xi_{0D}$$

Второе уравнение связывает  $\xi_{0D}/L$  с  $\xi/L$ .

## Второе уравнение

$$\pm c_d \left( \frac{L}{\xi} \right)^{d-2} = H \left( \frac{L}{\xi_{0D}} \right)$$

Получается из уравнения самосогласования в результате подстановки

$$D(\omega) = (-i\omega)\xi_{0D}^2$$

При конечных частотах

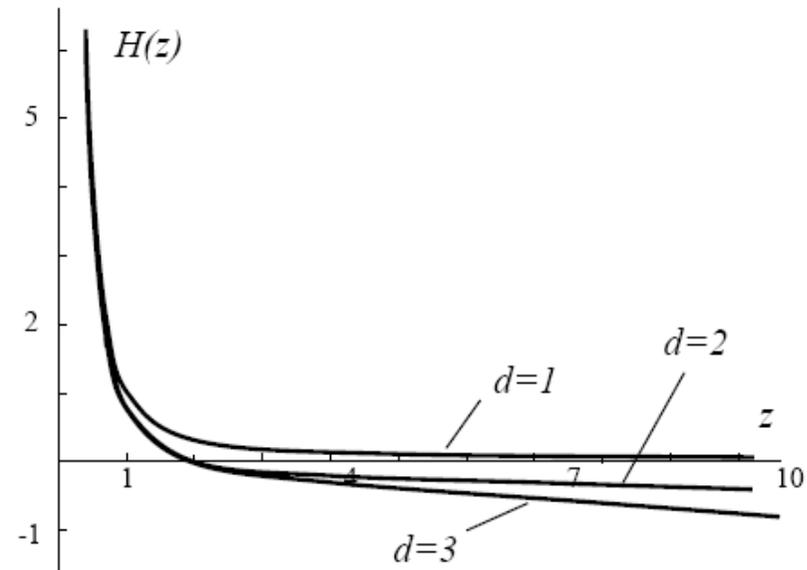
$$\pm c_d \left( \frac{L}{\xi} \right)^{d-2} = \frac{p}{z^2} + H(z)$$

$$p = (-i\omega + \gamma)/\Delta,$$

$$z = L/\xi_{0D}$$

При  $|p| \gg 1$  актуальны большие  $z$  :

$$\pm c_d \left( \frac{L}{\xi} \right)^{d-2} = \frac{p}{z^2} - c_d z^{d-2}$$



Теперь  $\xi_{0D}$  зависит от частоты

$$\xi_{0D}(\omega) = \left( \frac{-i\omega + \gamma}{\Delta} \right)^{-\beta} \xi_{0D}(0)$$

где  $\beta$  принимает значения 0, 1/d, 1/2 соответственно в локализованной фазе, критической области и металлическом состоянии.

В результате интегрирования по  $\omega$  эффективно происходит замена

$$(-i\omega + \gamma)^\beta \rightarrow (\omega^2 + \gamma^2)^{\beta/2}, \quad \omega \sim E, \quad \gamma \sim \gamma_{\min}$$

что позволяет использовать постоянное значение  $\xi_{0D}$ , которое определяется уравнением

$$\pm c_d (L/\xi)^{d-2} = \frac{s(k_1 + u)^{1/2}}{z^2} - c_d z^{d-2}, \quad z = L/\xi_{0D}$$

## Скейлинговые уравнения

$$\frac{\sigma_0^2}{\sigma_P^2} = u \ln \frac{1 + k_1 + u}{k_1 + u}, \quad u = \frac{k_\sigma}{\pi^2 s} F(1/z),$$

$$\pm c_d (L/\xi)^{d-2} = \frac{s(k_1 + u)^{1/2}}{z^2} - c_d z^{d-2}$$

При больших  $s$  можно использовать асимптотику  $F(x)$  и исключить  $z$ :

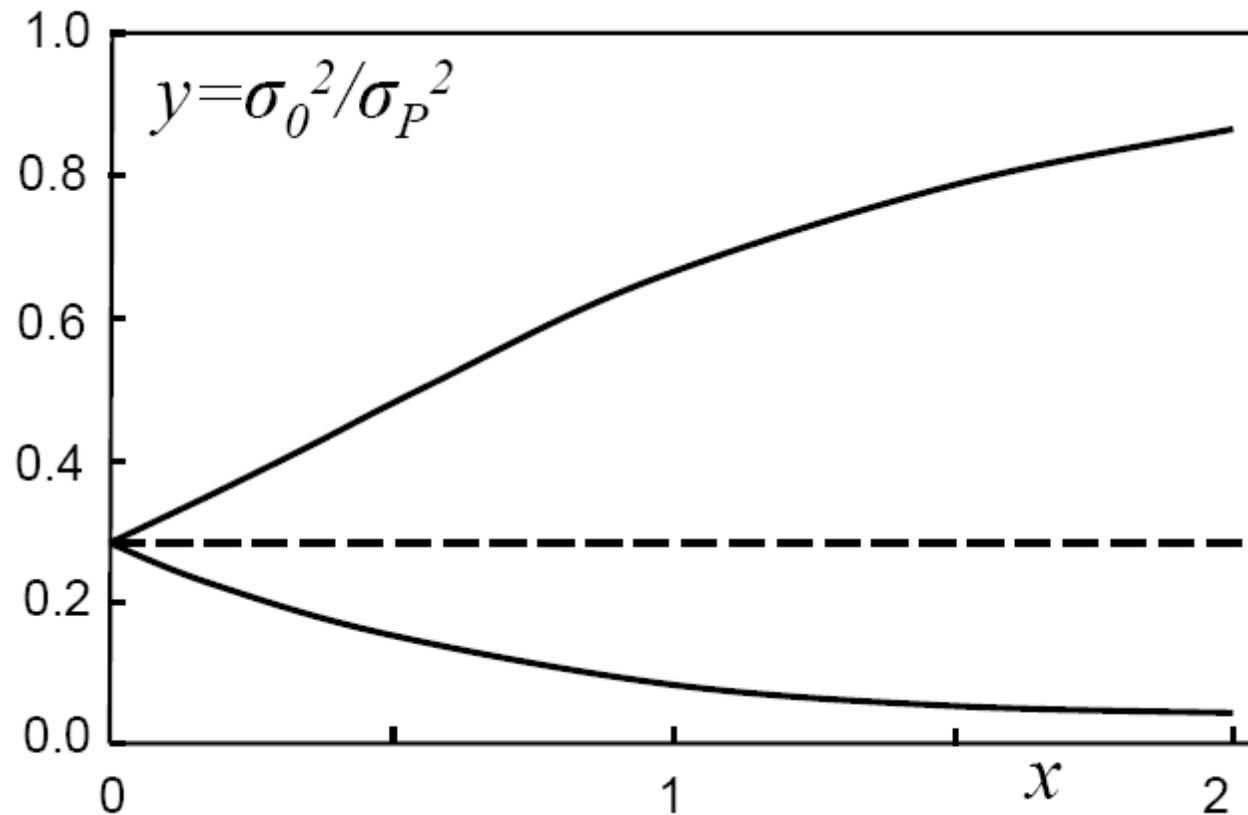
$$\frac{\sigma_0^2}{\sigma_P^2} = k_1 u \ln \frac{1 + k_1 + k_1 u}{k_1 + k_1 u},$$
$$\pm \left( \frac{L}{s^{1/d} \xi} \right)^{d-2} = \frac{(1 + u)^{1/2} - Bu}{u^{2/d}}$$

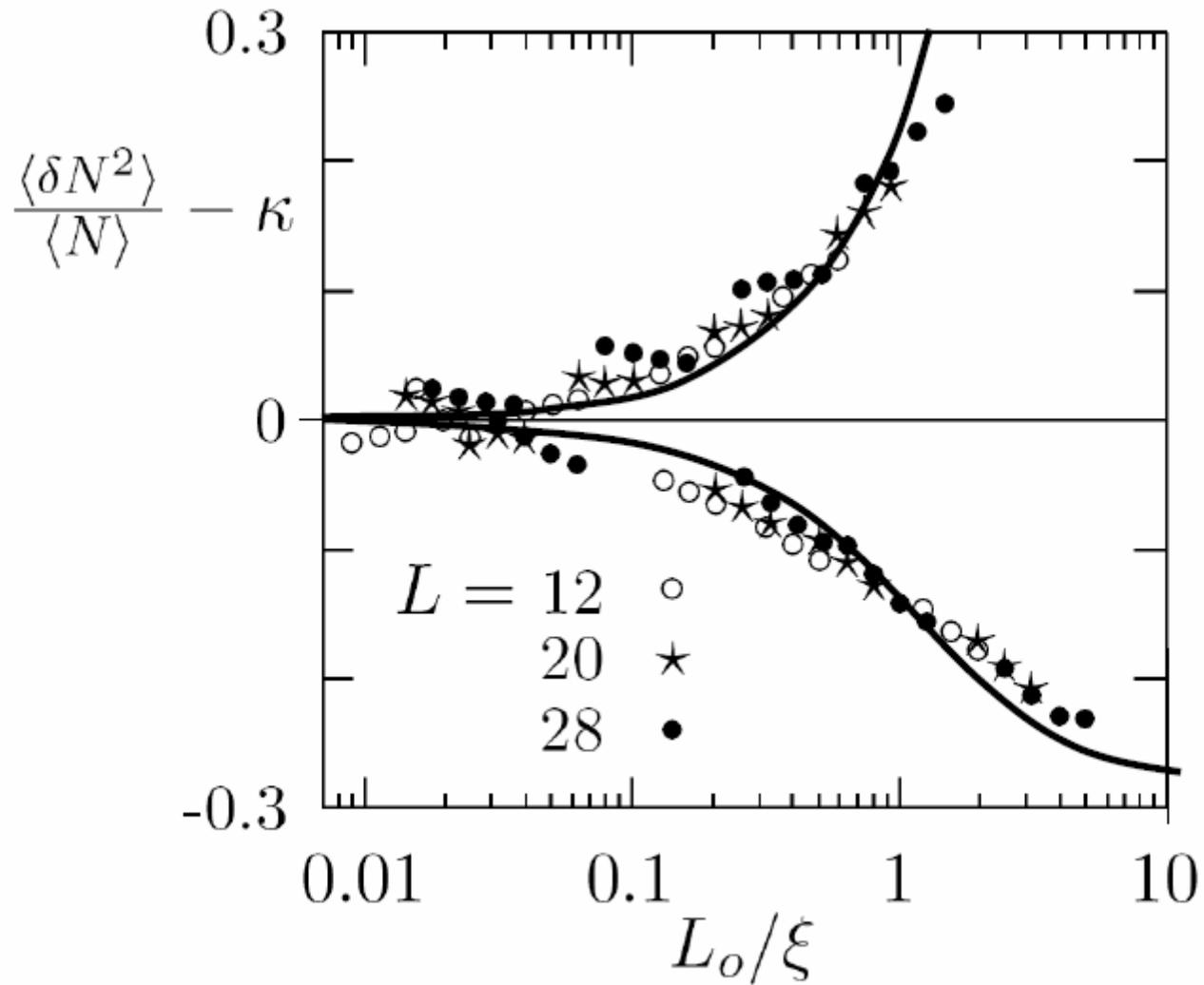
что определяет скейлинг

$$\frac{\sigma_0^2}{\sigma_P^2} = F_\sigma \left( \frac{L}{s^{1/d} \xi} \right)$$

## Скейлинг для $\sigma_0^2$

Из трех параметров  $k_1, k_2, k_\sigma$  два выбираются теоретически – из соответствия с металлической и локализованной фазой, третий обеспечивает правильное положение критической точки.

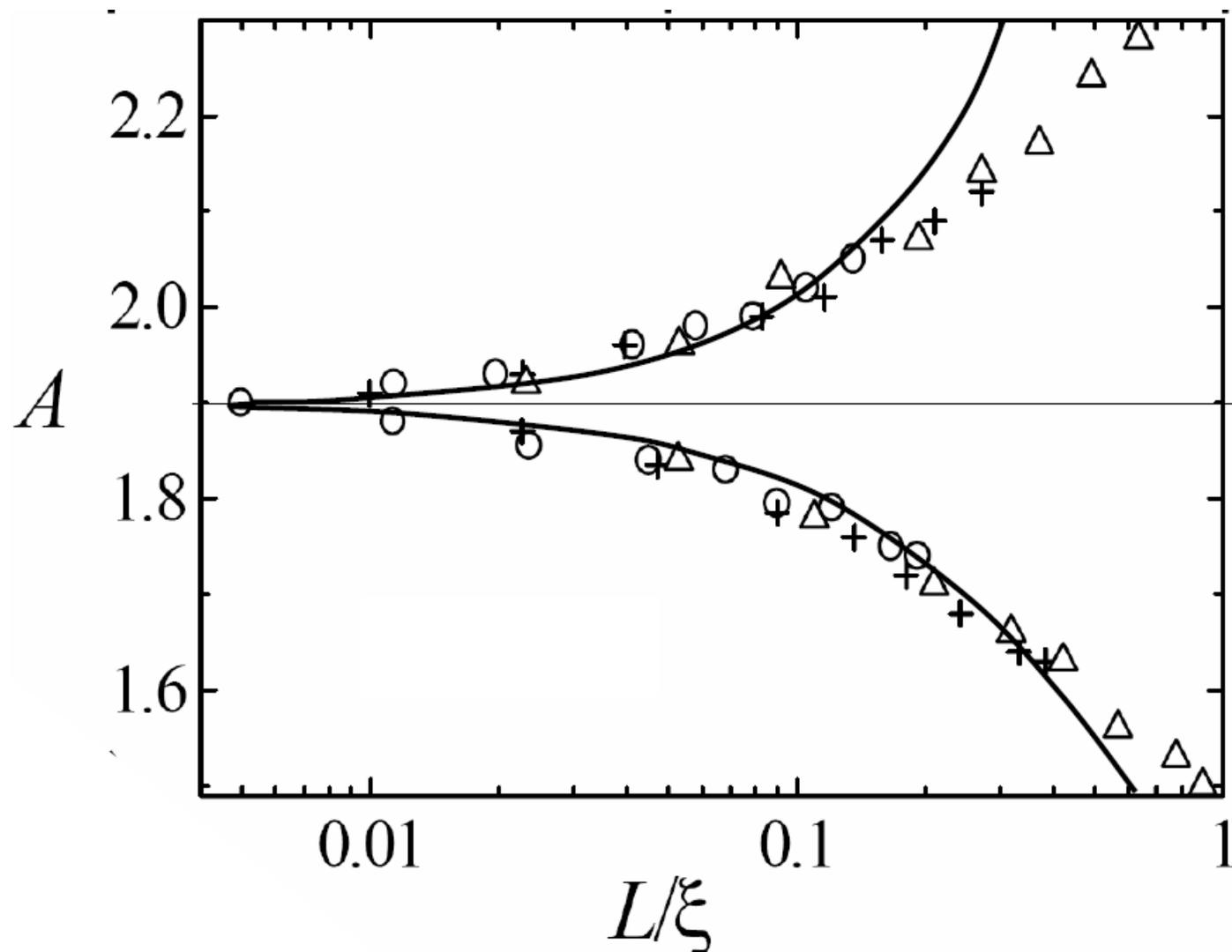




$$L_o = Ls^{-1/3}$$

# Скейлинг для $\sigma^2$ и $A$

I. Kh. Zharekeshev, B. Kramer, Phys. Rev. Lett. **79**, 717 (1997).



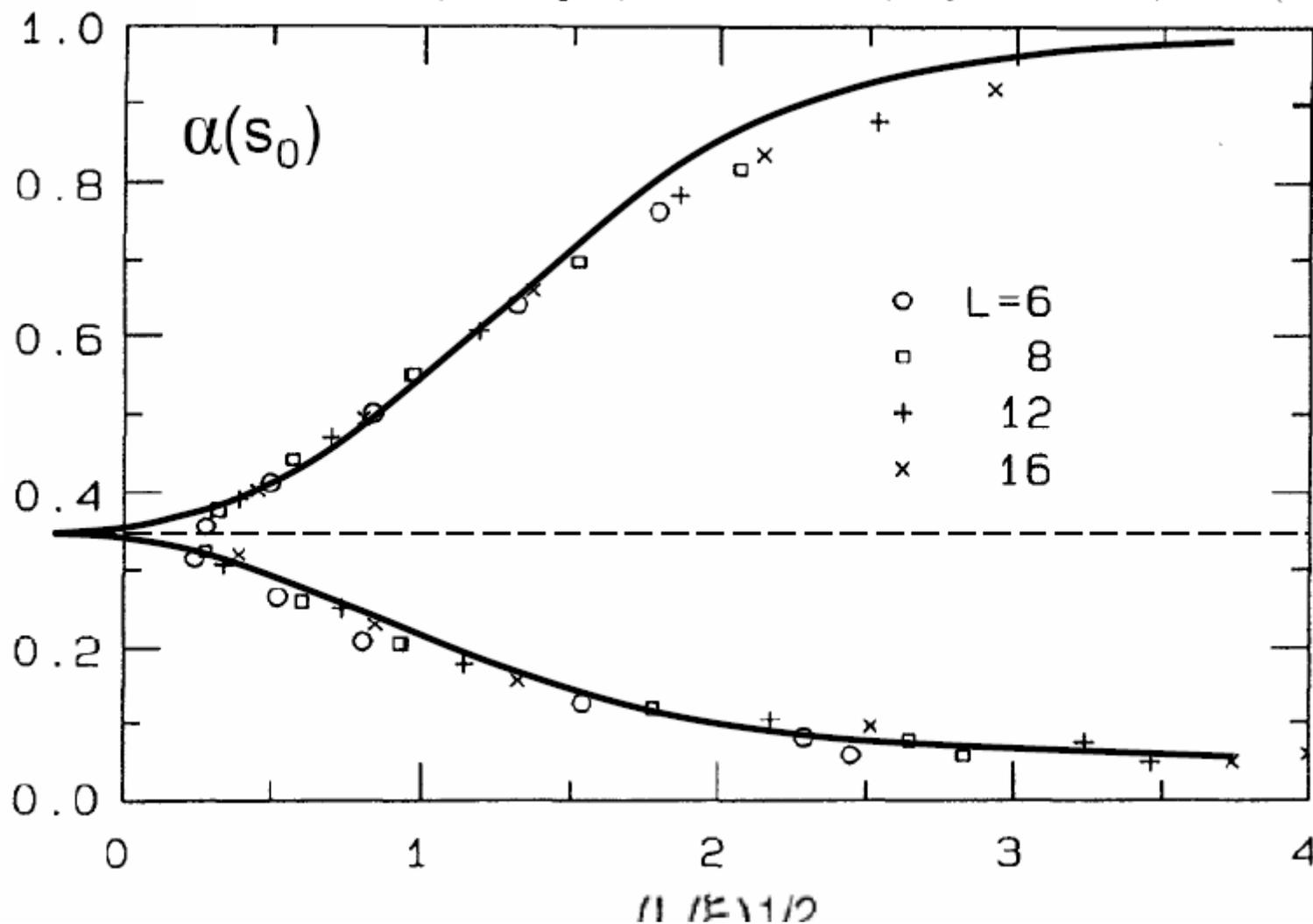
$$A = \frac{\sigma_P^2}{\sigma^2}$$

# Скейлинг для $\alpha(s_0)$

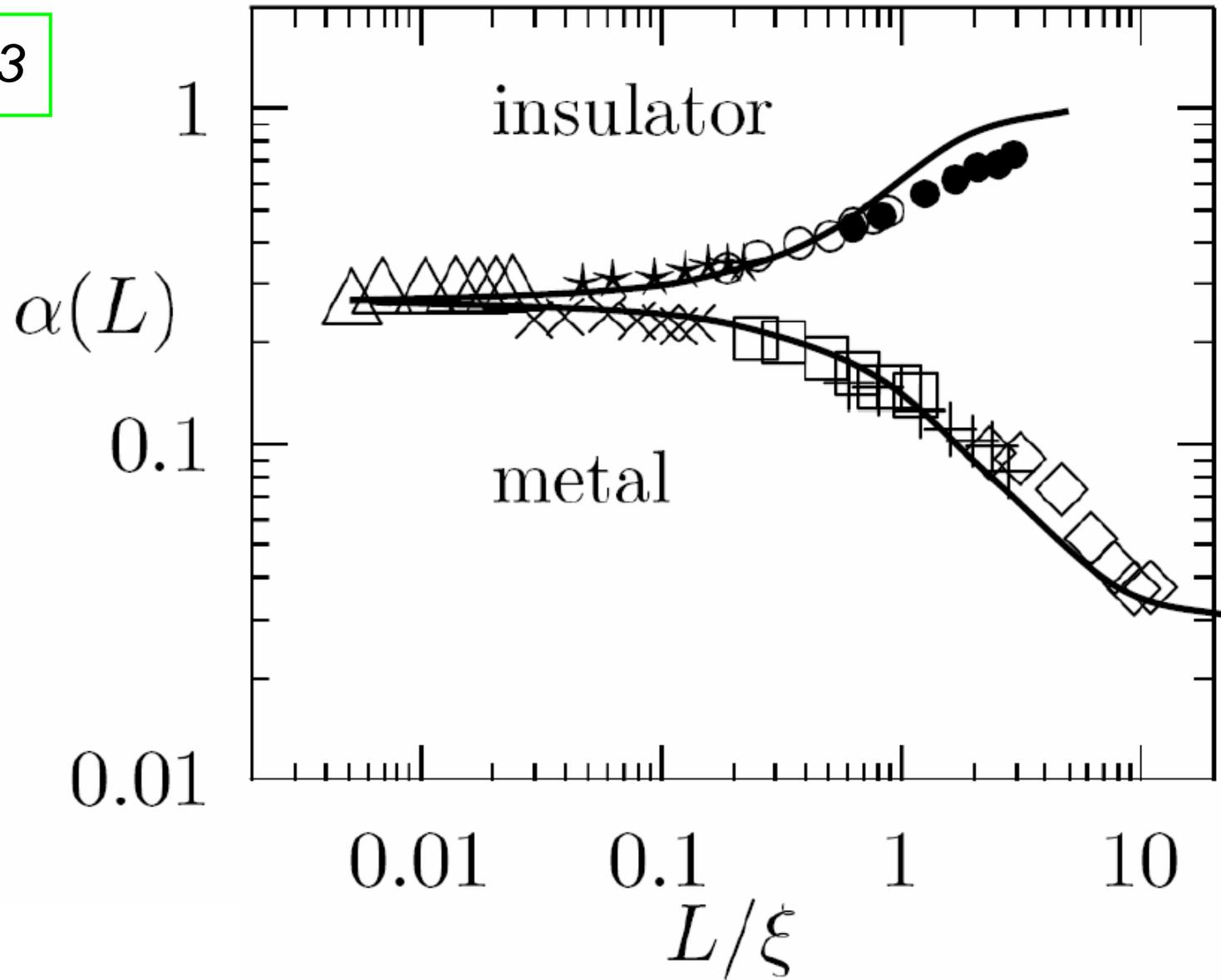
$$s_0 = 2.002$$

$$\alpha(s_0) = \exp \left\{ -s_0 \frac{\sigma_P^2 - \sigma^2}{\sigma^2} \right\}$$

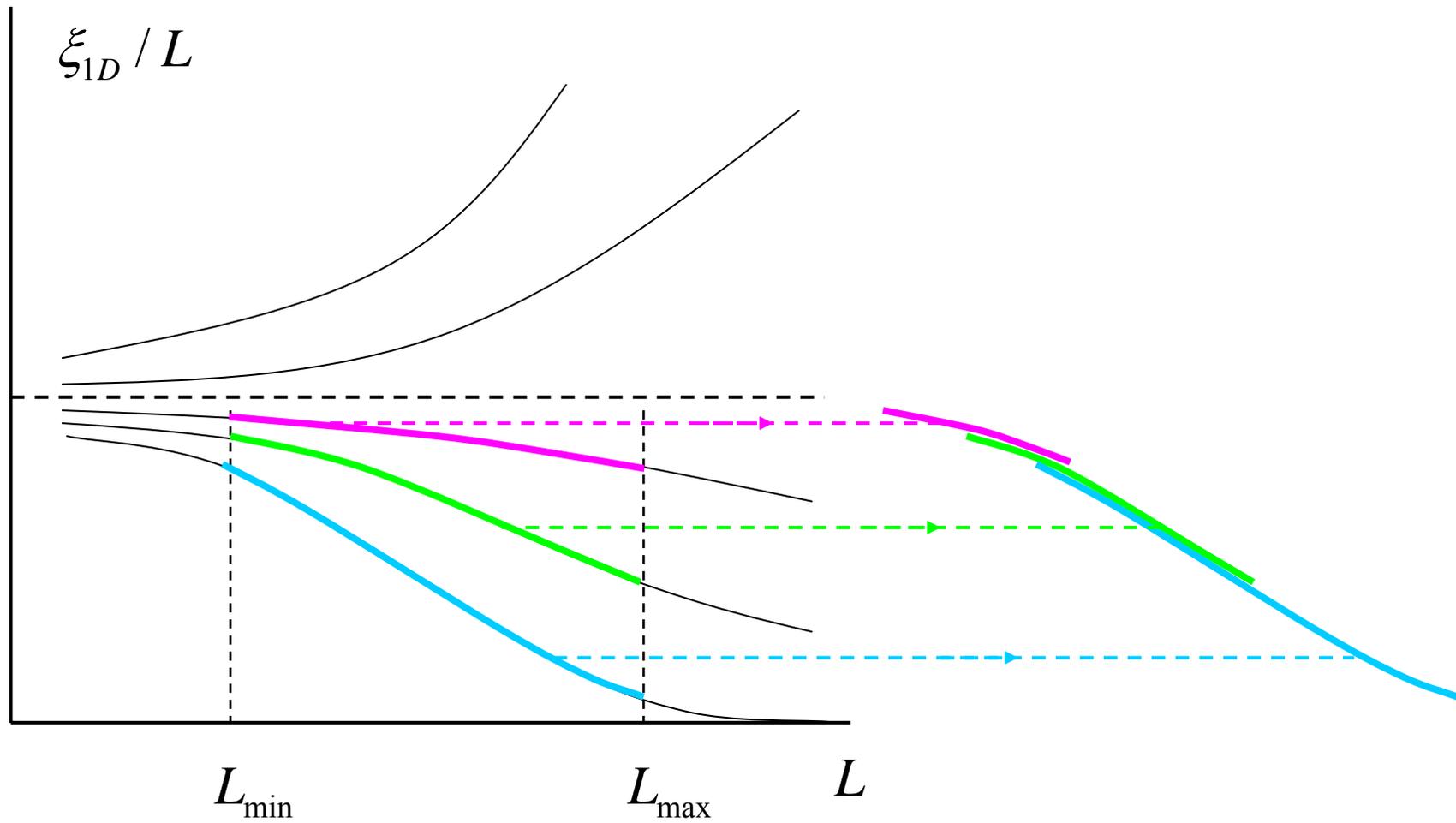
B. I. Shklovskii, B. Shapiro, B. R. Sears et al, Phys. Rev. B 47, 11487 (1993).



$s_0=0.473$



# Построение скейлинговых кривых



## Критическое поведение и поправки к скейлингу

Стандартная процедура:

$$Q = F\left(\frac{L^{1/\nu}}{\xi^{1/\nu}}\right) = F(\tau L^{1/\nu}) \approx Q_c + C\tau L^{1/\nu} + \dots \quad \longrightarrow \quad dQ/d\tau \sim L^{1/\nu}$$

В общем случае:

$$Q = Q_c + \tau \left\{ A_0 L^{1/\nu} + A_1 L^{\omega_1} + A_2 L^{\omega_2} + \dots \right\} + B_1 L^{-\nu_1} + B_2 L^{-\nu_2} + \dots$$

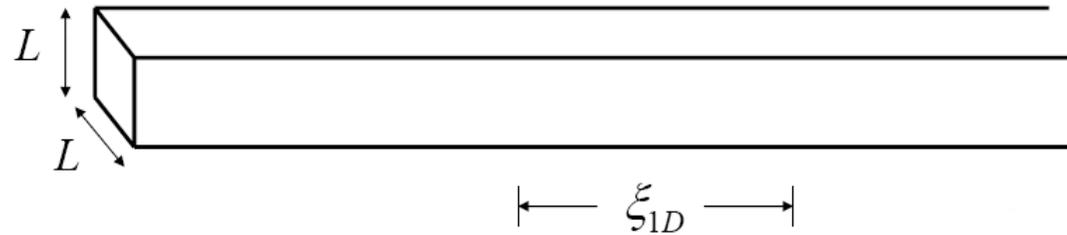
Для самосогласованной теории

$$Q = Q_c + \tau (C_0 L^{d-2} + C_1 L^{2d-6} + \dots)$$

что в трехмерном случае дает

$$Q = Q_c + C_0 \tau (L + L_0)$$

# Квазиодномерные системы

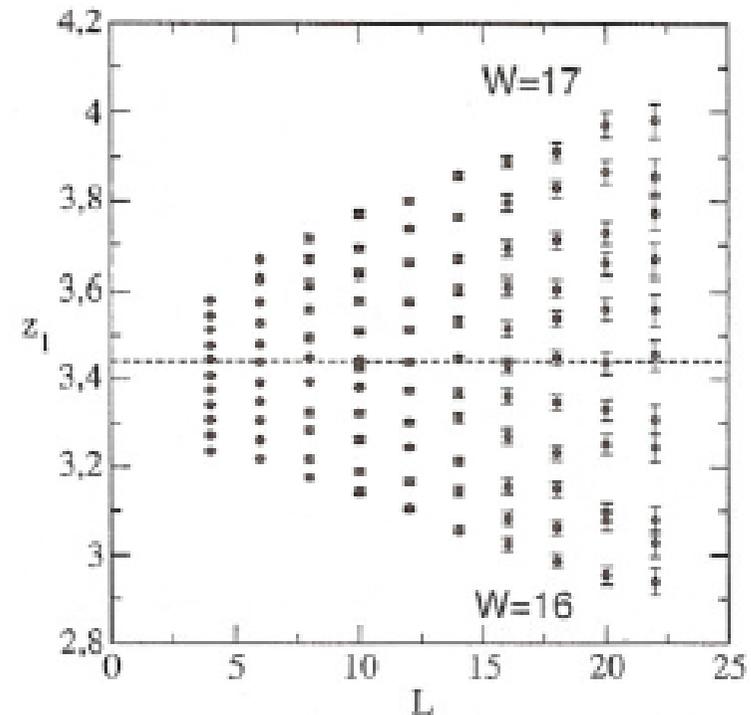


Скейлинговый параметр:

$$z_1 = L/\xi_{1D}$$

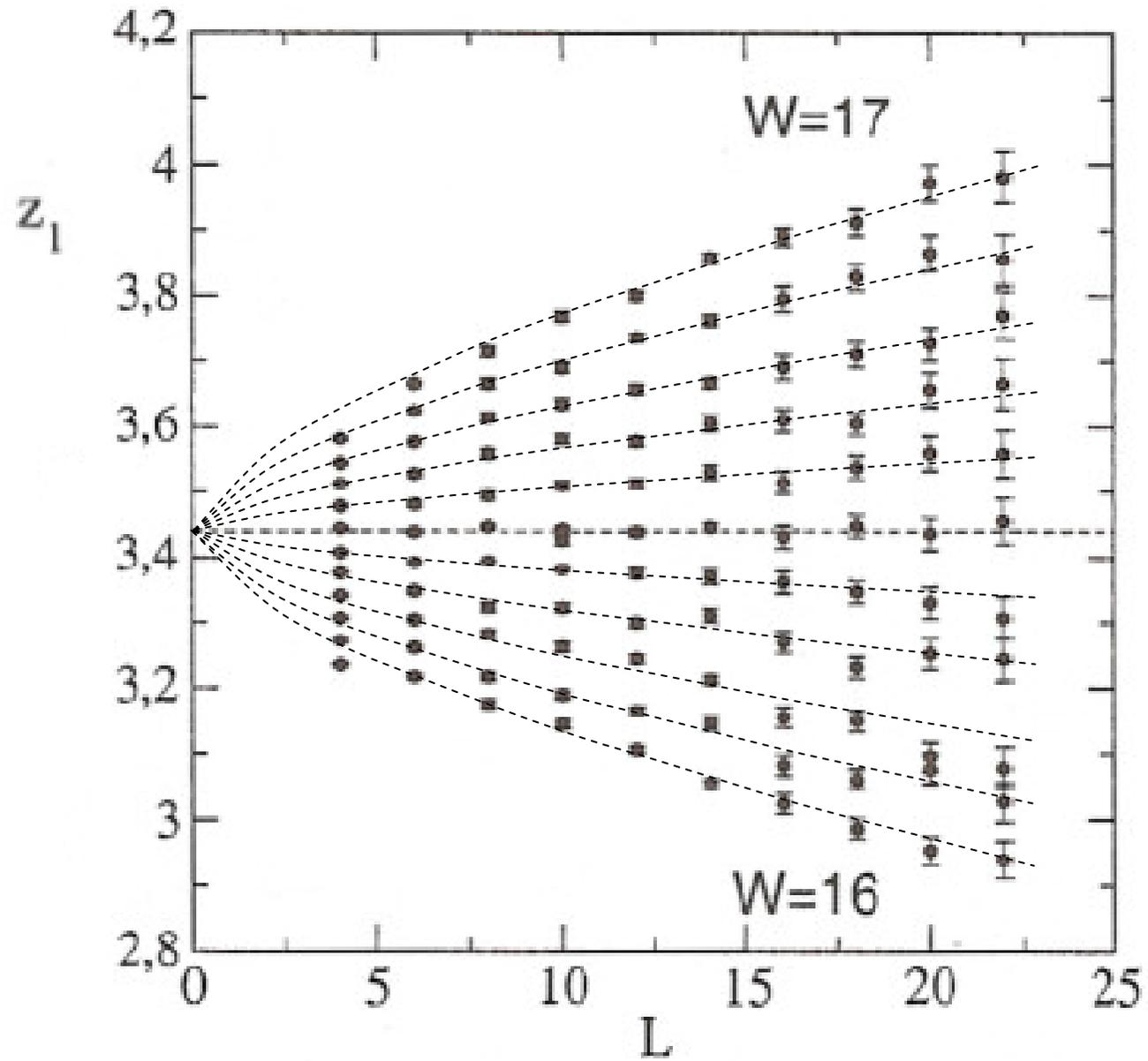
где  $\xi_{1D}$  – корреляционный радиус квазиодномерной системы.

$$z_1 = F\left(\frac{L}{\xi}\right)$$



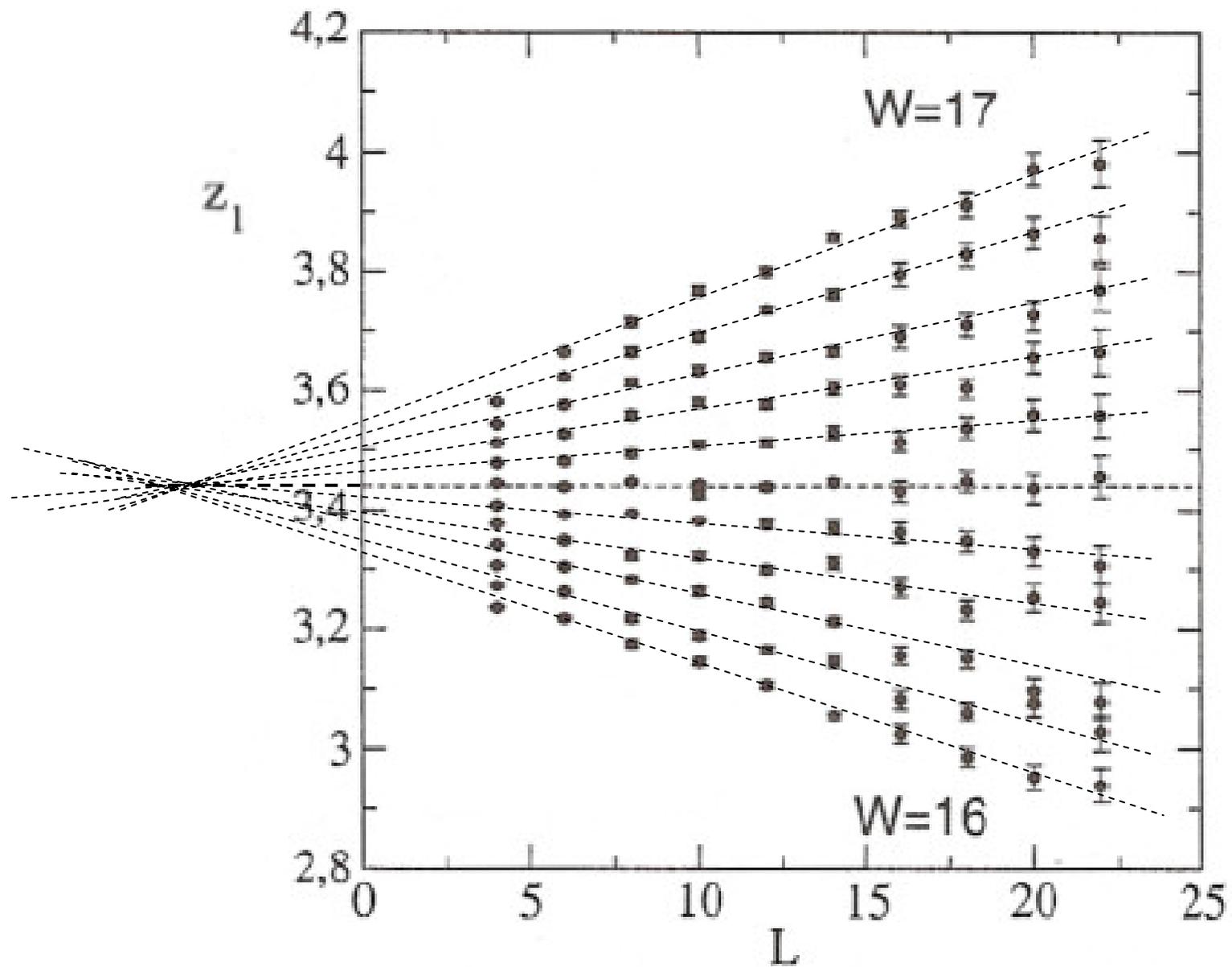
P.Markos, 2006

Fitting by  $cL^{0.63}$



$\nu \approx 1.6$

# Fitting by $c(L+L_0)$



$L_0 \approx 5$

acta physica slovacica 56, 561 (2006);

## NUMERICAL ANALYSIS OF THE ANDERSON LOCALIZATION

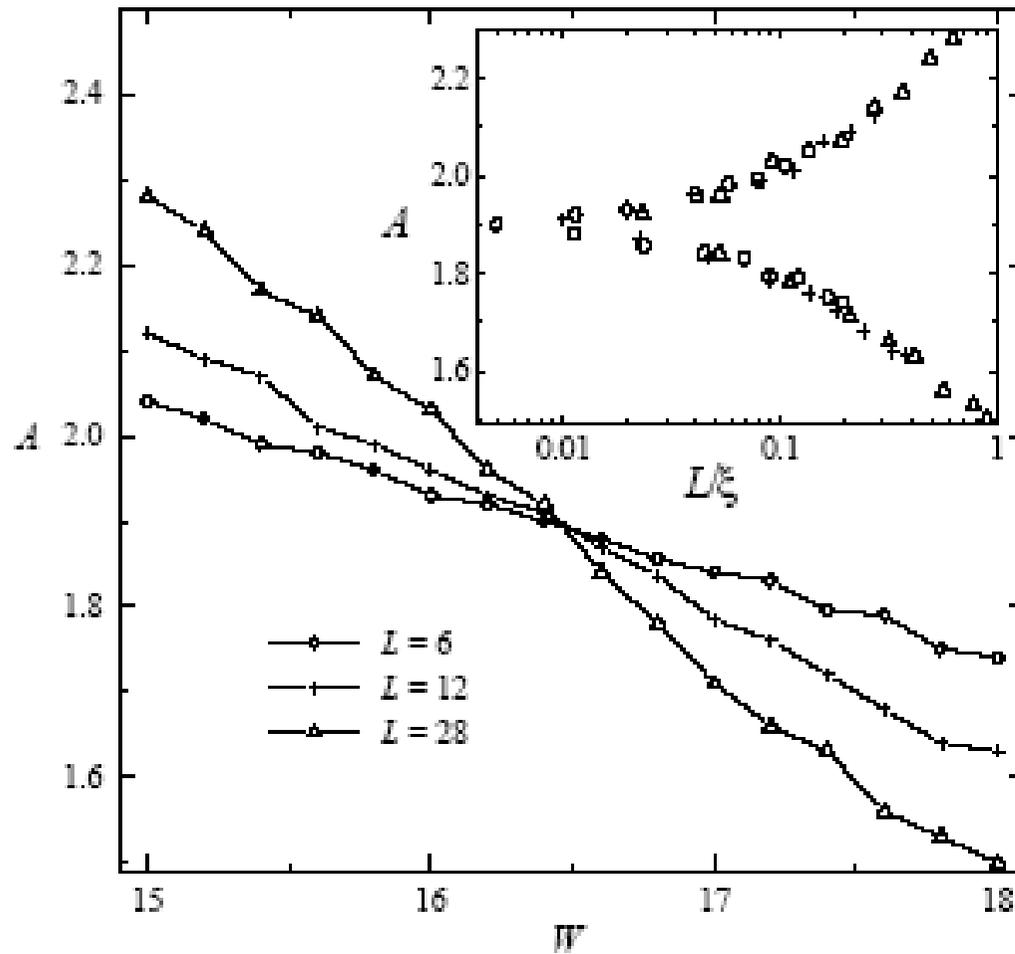
P. Markoš<sup>1</sup>

*Institute of Physics, Slovak Academy of Sciences, 845 11 Bratislava, Slovakia*

Our belief that the numerical data for the critical exponent are correct, is supported also by results of the scaling analysis of various groups. In the 3D systems, various models were studied, isotropic and anisotropic [153], with diagonal or off-diagonal disorder [131, 132]. Scaling of various parameters was analyzed, inclusive the smallest Lyapunov exponent, higher Lyapunov exponents, conductance [136, 137], conductivity [154], level statistics [61, 141] and inverse participation ratio [56]. All these works report the critical exponent close to 1.5, with the accuracy which definitely excludes the possibility that  $\nu = 1$ .

# Статистика уровней

I.Kh.Zharekeshev, V.Kramer, PRL, 79, 717 (1997)



I.Kh.Zharekeshev, B.Kramer,  
PRL, 79, 717 (1997)

Размеры до  $100^3$

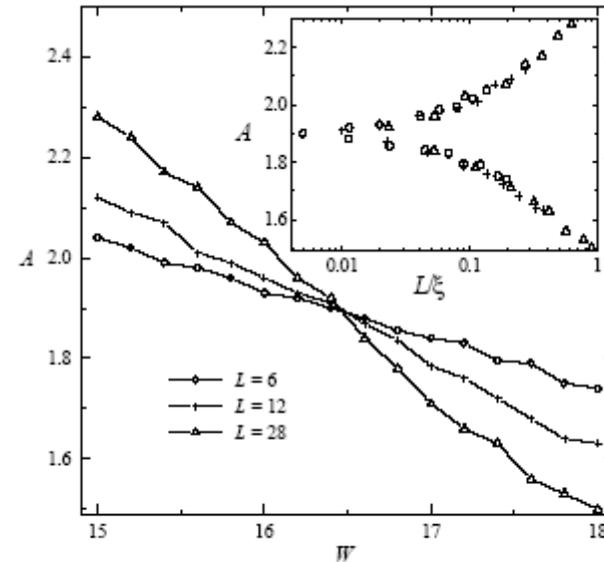


FIG. 4. Scaling variable  $A$  as a function of the disorder  $W$  for different  $L$ , showing critical behavior near the MIT. Inset: the one-parameter dependence of  $A$  on  $L/\xi(W)$ .

validity of (7). As one can see in Fig. 4 of [20], dependence  $Q$  on  $\tau$  is only approximately close to linear, but in fact it is an essentially broken line. To demonstrate a situation, we give in a Table an average slope of dependence  $Q$  on  $\tau$  and its fluctuations in the interval  $16 < W < 17$ , which corresponds to a condition  $\tau(L/a)^{1/\nu} \lesssim 1$ .

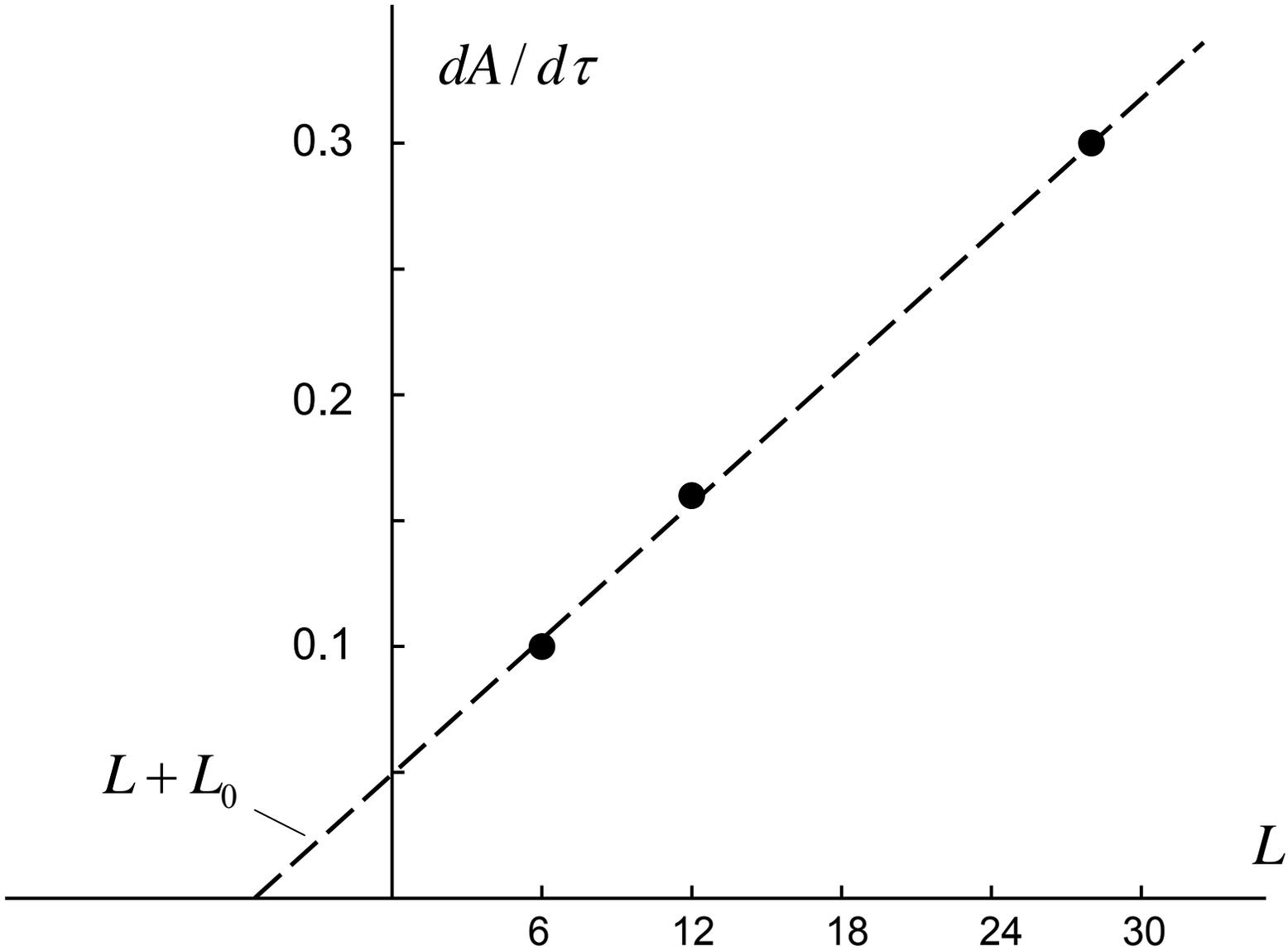
*T a b l e*

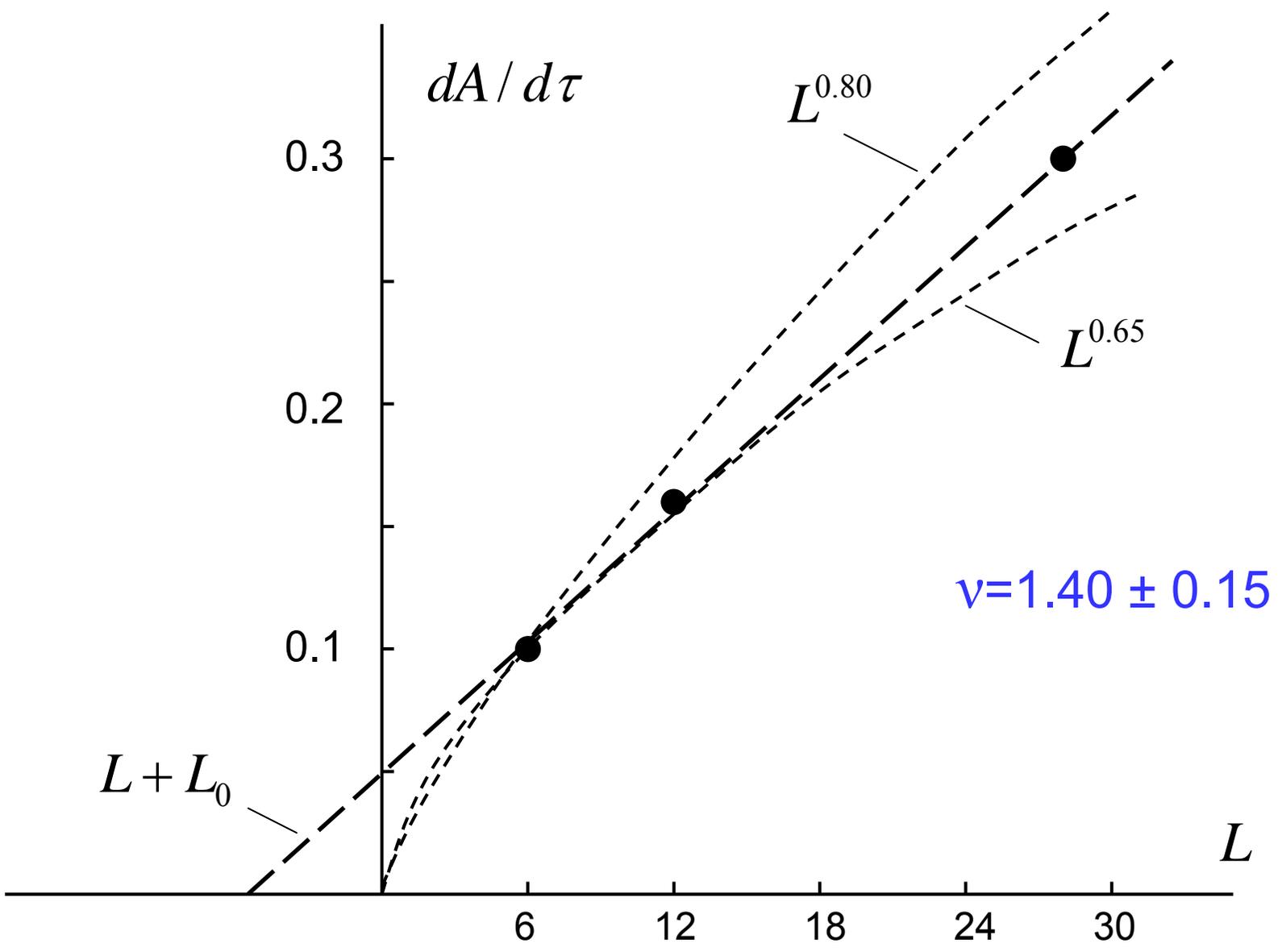
Slope of dependence  $Q$  on  $\tau$  (arbitrary units)

	$L = 28$	$L = 12$	$L = 6$
Average value	0.30	0.16	0.10
Least value for $16 < W < 17$	0.20	0.10	0.04
Largest value for $16 < W < 17$	0.42	0.25	0.12

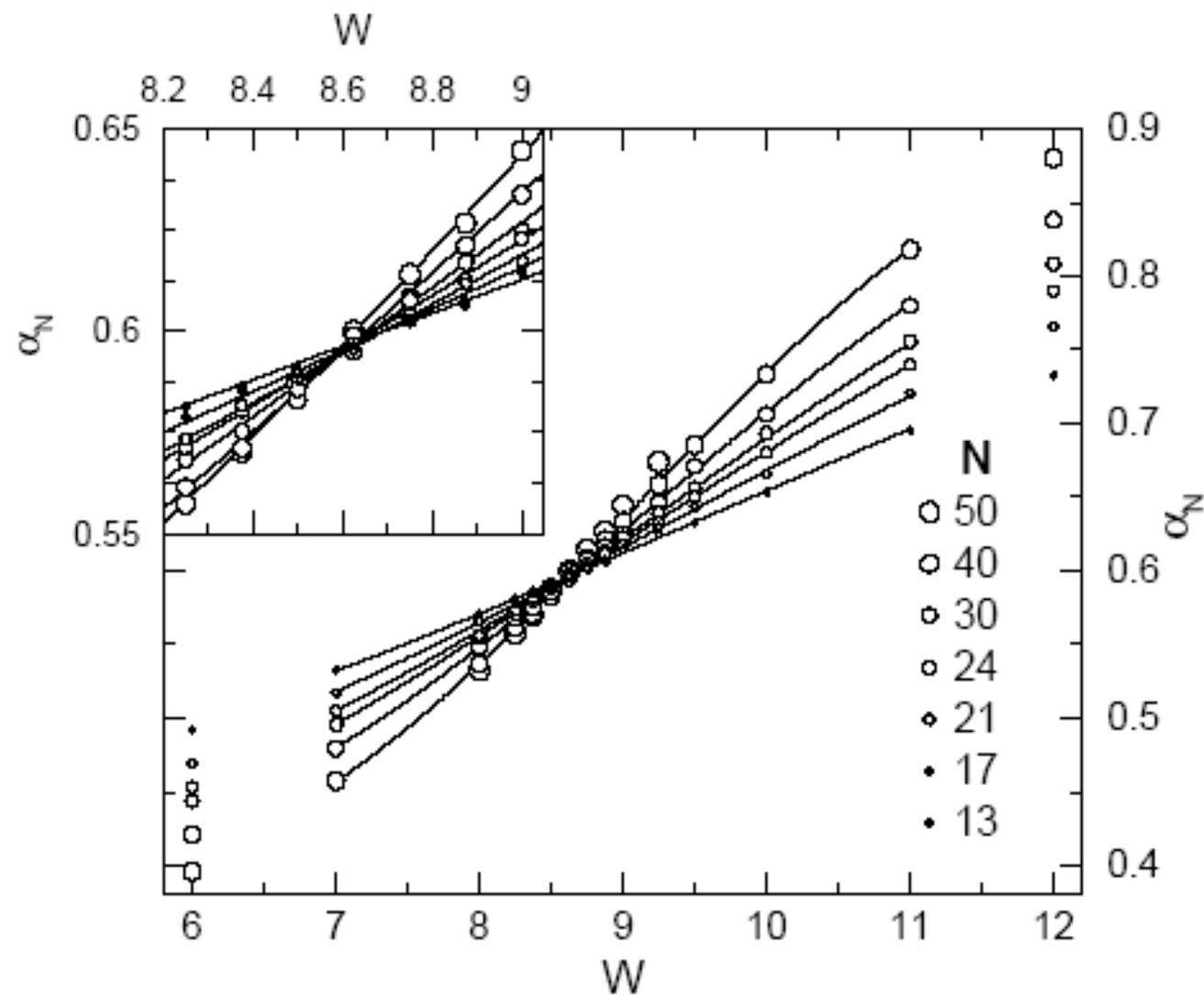
I.M.Suslov,  
cond-mat/0105325

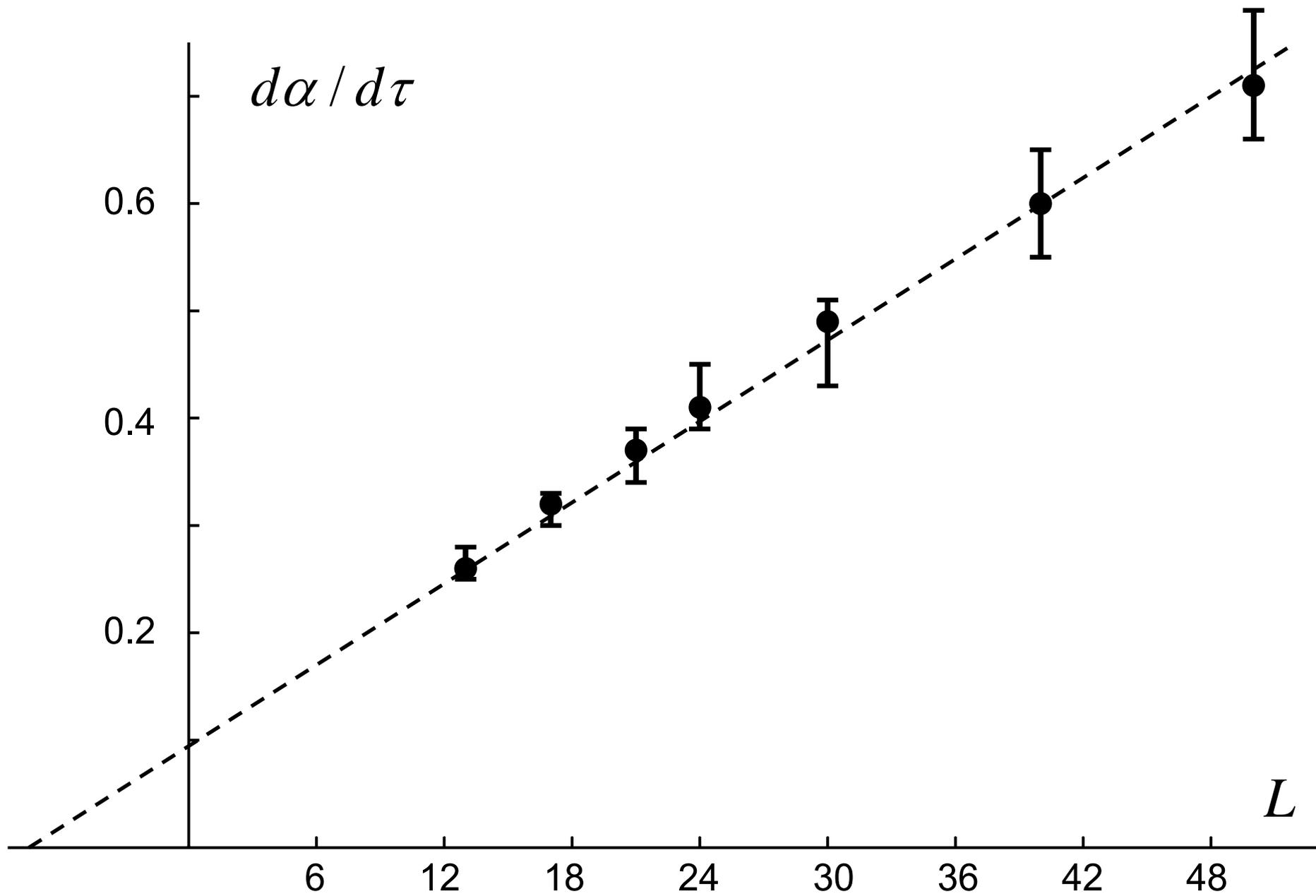
With the use of the average slope, we indeed obtain  $\nu \approx 1.4$ , as it was reported in [20]. With real uncertainties taken into account, we can have any value of  $\nu$  in the interval  $0.7 \div 3.0$ . Authors of [20] give essentially smaller error, relying on the averaging procedure.





F. Milde, R. A. Romer, M. Schreiber, Phys. Rev. B **61**, 6028 (2000).





## Двумерный случай

$$\frac{\sigma_0^2}{\sigma_P^2} = k_1 u \ln \frac{1 + k_1 + k_1 u}{k_1 + k_1 u},$$

$$-\ln \left( \frac{L}{s^{1/2} \xi} \right) = B \frac{(1+u)^{1/2}}{u} - \ln \sqrt{u}$$

Используется более сложный скейлинговый параметр:

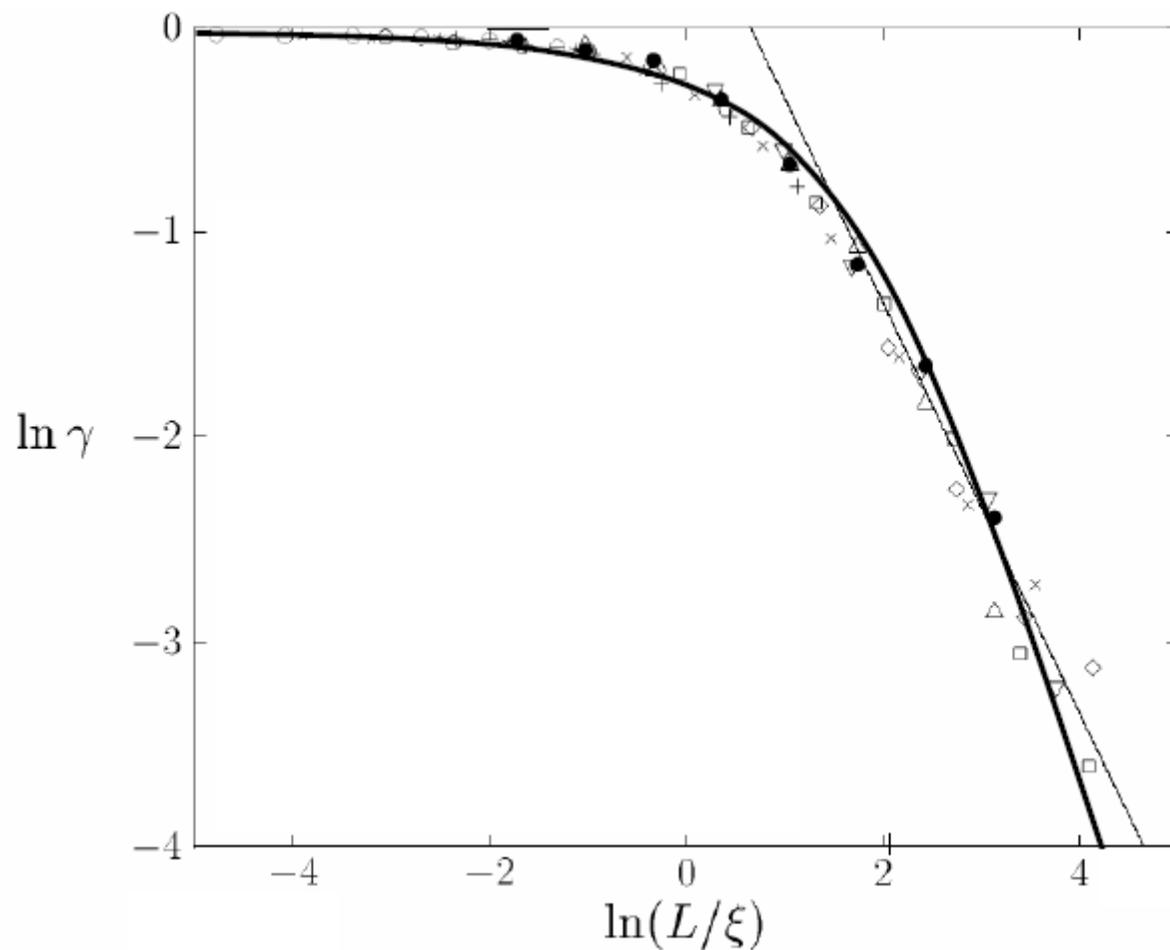
$$\gamma(s_0) = \mathcal{N}^{-1} \int_{s_0}^{\infty} [I(s) - I_P(s)] ds$$

$$I(s_0) = \int_{s_0}^{\infty} P(s) ds$$

где нормировочный множитель  $\mathcal{N}$  выбирается из условия  $\gamma(s_0) = 1$  при  $I(s) = I_W(s)$ . Полагая  $I(s) \sim \exp\{-s\sigma_P^2/\sigma^2\}$  и считая  $\sigma_P^2/\sigma^2$  почти постоянным:

$$\gamma(s_0) = 1 - \sigma^2/\sigma_P^2 \exp \left\{ -s_0 \frac{\sigma_P^2 - \sigma^2}{\sigma^2} \right\}$$

I. Kh. Zharekeshev, M. Batsch, B. Kramer, Europhys. Lett. **34**, 587 (1996).



Эмпирически для больших  $L/\xi$  установлено соотношение

$$\gamma(s_0) \sim \sigma^2/\sigma_P^2 - 1 \sim (\xi/L)$$

которое не выполняется в настоящей теории.

## Высшие размерности: необходимость переинтерпретации

Все численные алгоритмы основаны на однопараметрическом скейлинге:

$$Q = F \left( \frac{L}{\xi} \right)$$

При  $d > 4$  теория неперенормируема и атомный масштаб нельзя исключить из результатов:

$$Q = F \left( \frac{L}{\xi}, \frac{L}{a} \right)$$

При  $d = 4$  – такое же соотношение из-за логарифмов типа  $\ln(L/a)$ . При надлежащем выборе переменных возникает функция одного аргумента – модифицированный скейлинг.

## Высшие размерности: статистика уровней

Справедливы уравнения

$$\frac{\sigma_0^2}{\sigma_P^2} = k_1 u \ln \frac{1 + k_1 + k_1 u}{k_1 + k_1 u},$$
$$\pm \frac{x^2}{s^{1/2}} = \frac{(1 + u)^{1/2} - Bu}{u^{1/2}}$$

определяющие скейлинг

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_P^2} = F\left(\frac{x}{s^{1/4}}\right), \quad x = \frac{L}{\xi} \left(\frac{L}{a}\right)^{(d-4)/4} \quad \text{для } d > 4$$

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_P^2} = F\left(\frac{x}{s^{1/4}}\right), \quad x = \frac{L}{\xi} \frac{[\ln(\xi/a)]^{1/2}}{[\ln(L/a)]^{1/4}} \quad \text{для } d = 4$$

Уравнения универсальны, но параметры зависят от  $d$ .

## Нетривиальный момент

Из общих соображений в высших размерностях

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_P^2} = F \left( \frac{L}{\xi}, \frac{L}{a} \right)$$

и в точке перехода

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_P^2} = F \left( 0, \frac{L}{a} \right) \neq const$$

Тем не менее зависимость от  $L$  отсутствует, в соответствии с существованием стационарного распределения:

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_P^2} = F \left( \frac{x}{s^{1/4}} \right), \quad x = \frac{L}{\xi} \left( \frac{L}{a} \right)^{(d-4)/4}$$

В численных экспериментах в качестве скейлинговых параметров используются

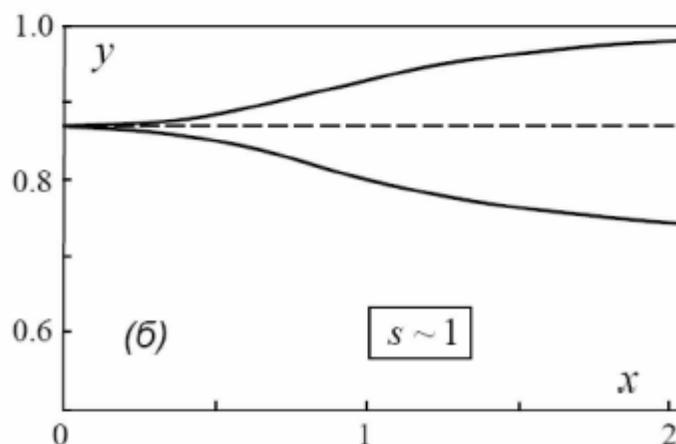
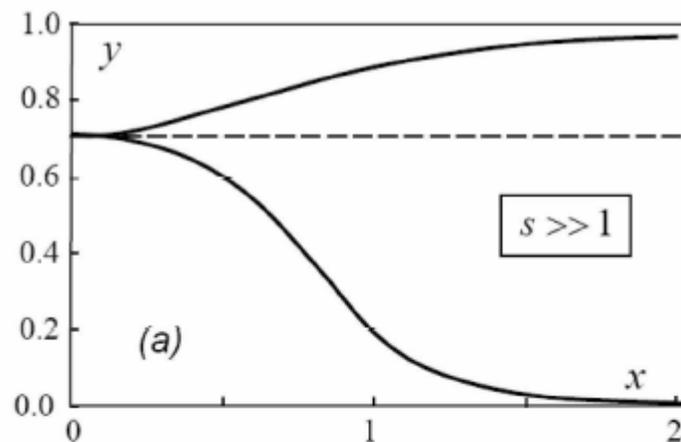
$$J_0 = \frac{1}{2} \langle s^2 \rangle = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} s^2 P(s) ds \approx \frac{\sigma^2}{\sigma_P^2} \Big|_{s \sim 1}$$

$$\eta = \frac{J_0 - J_{0W}}{J_{0P} - J_{0W}} = \frac{J_0 - 0.643}{0.357}$$

где  $P(s)$  – функция распределения расстояния  $\omega = s\Delta$  между ближайшими уровнями. Величины  $J_0$  и  $\eta$  – регулярные функции от  $y$ , так что

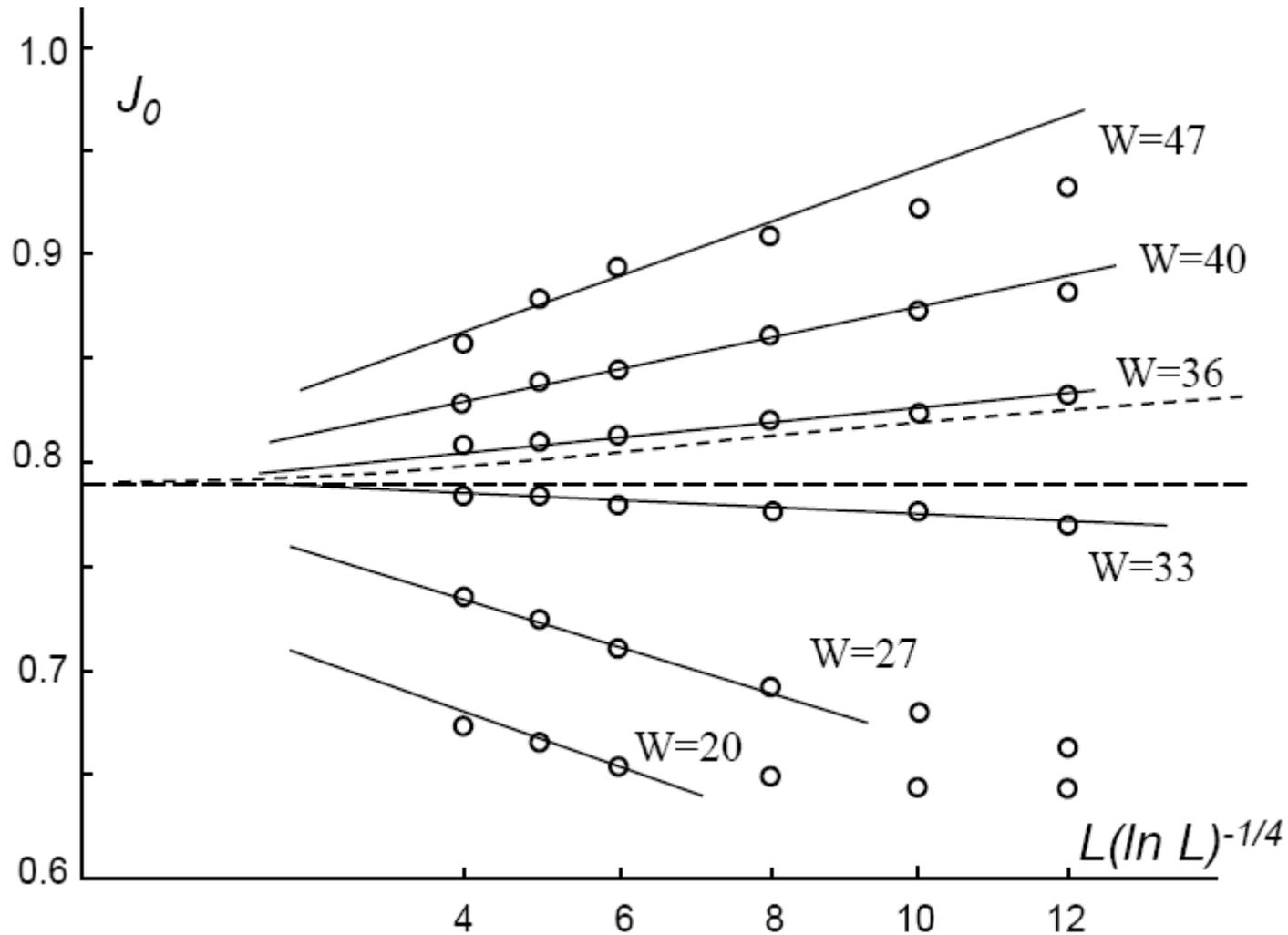
$$J_0 - J_{0c} \sim \eta - \eta_c \sim y - y_c$$

Примеры скейлинговых зависимостей для параметров, соответствующих  $d=4$  :

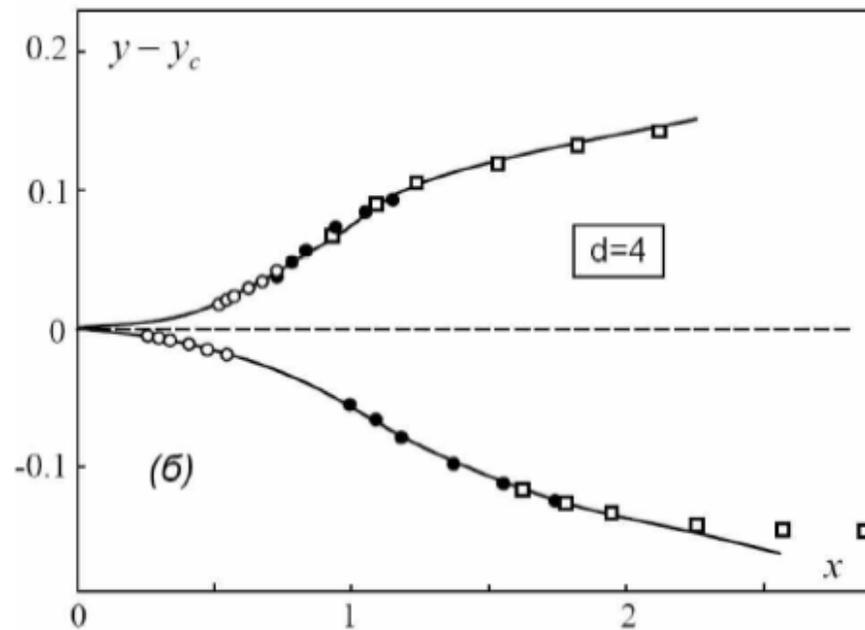
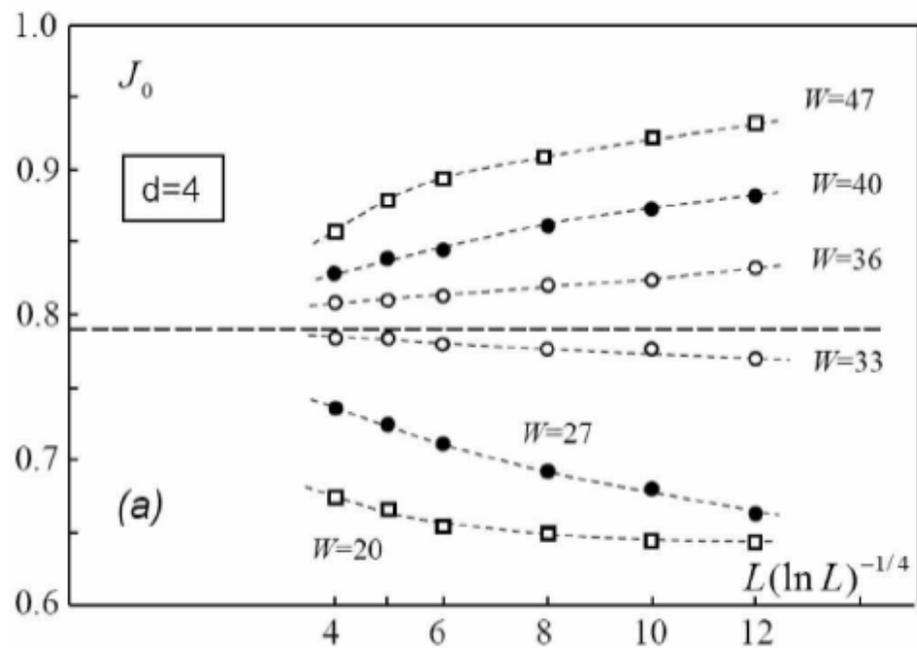


Правильное критическое поведение  $y - y_c \sim x^2$  реализуется в узкой области  $x < 0.2$ , а при  $x \sim 1$  зависимости квазилинейны.

I. Kh. Zharekeshev, B. Kramer, Ann. Phys. (Leipzig) **7**, 442 (1998).



Линейная зависимость  $J_0 - J_{0c} \sim L$  интерпретируется как  $L^{1/\nu}$  с  $\nu \approx 1$ .



I. Kh. Zharekeshev, B. Kramer, Ann. Phys. (Leipzig) **7**, 442 (1998).

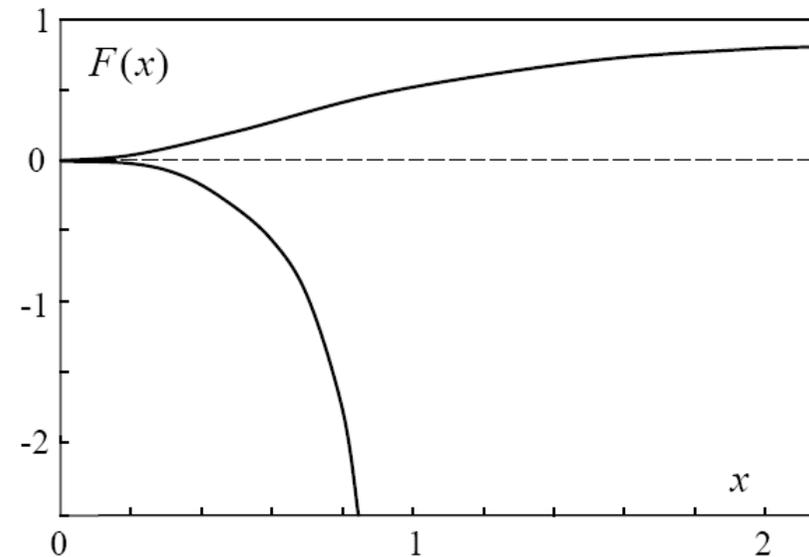
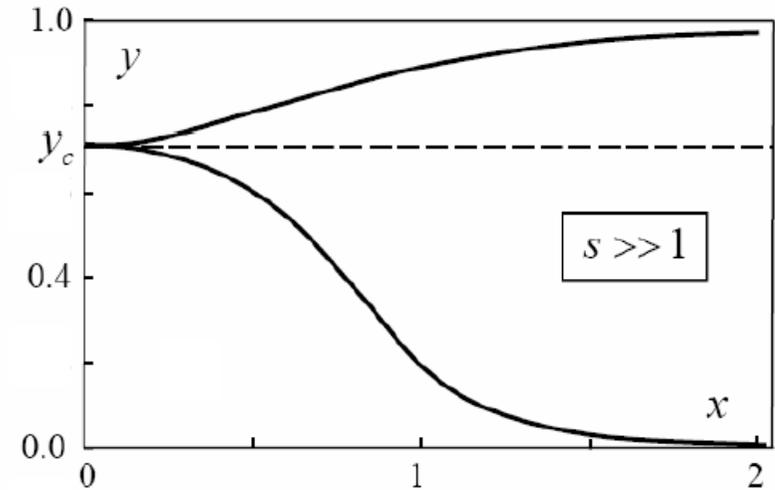
Значение  $y_c$  стремится к 1 при увеличении  $d$ , в согласии с теоремой

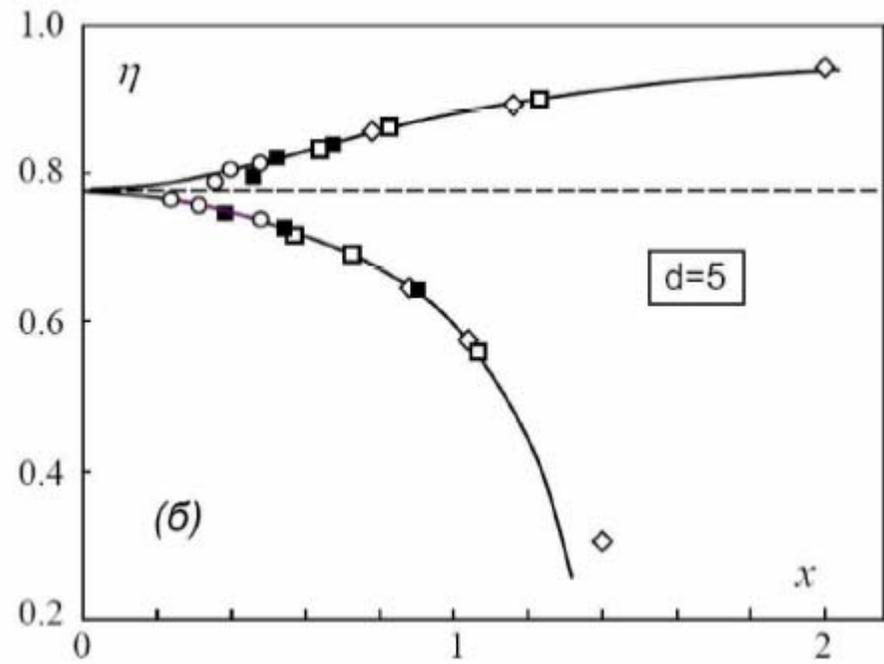
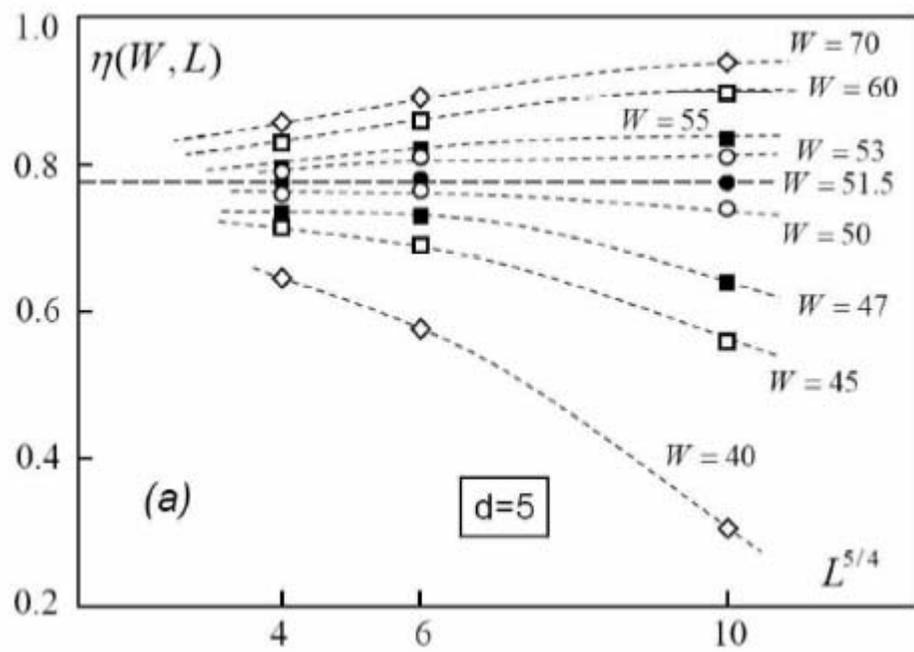
M. Aizenman, S. Warzel, Math. Phys. Anal. Geom. **9**, 291 (2006).

что для решетки Бете ( $d=\infty$ ) статистика уровней является пуассоновской даже в металлической фазе.

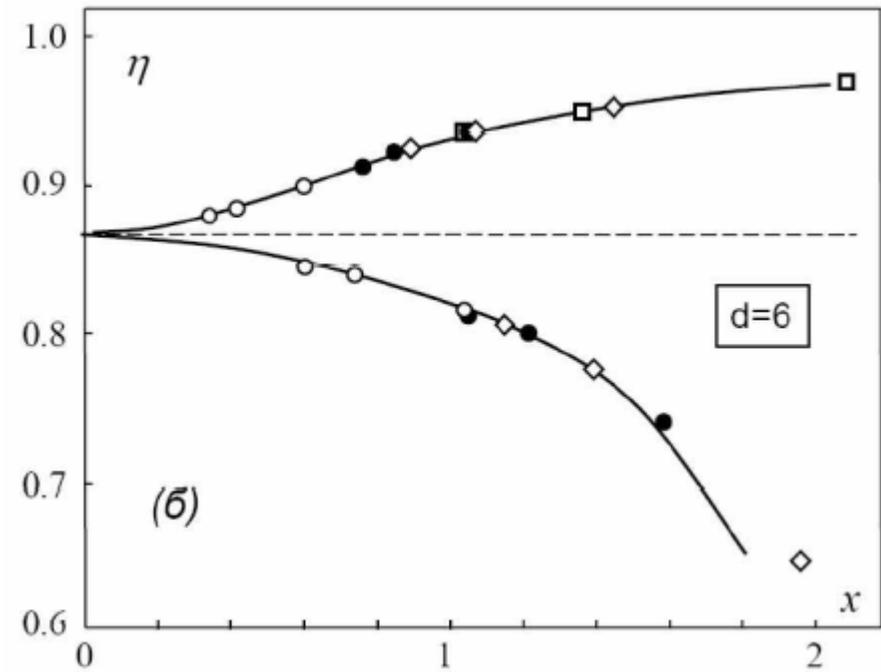
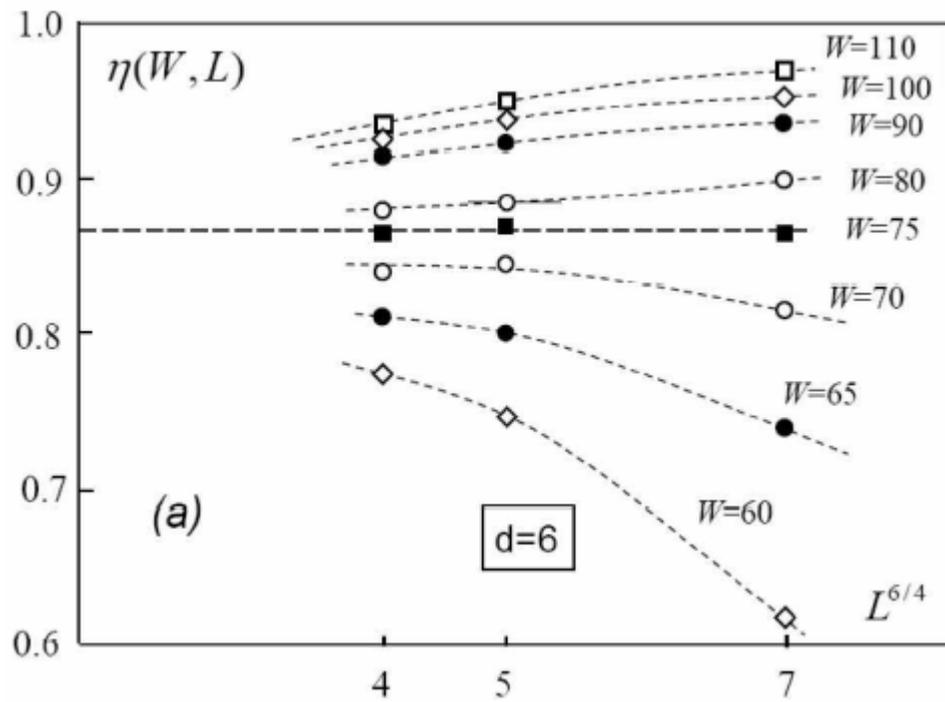
Условие  $1-y \ll 1$  позволяет получить универсальную скейлинговую функцию для высоких размерностей:

$$y - y_c = \text{const } F(x), \quad F(x) = \frac{\pm x^2}{1 \pm x^2}$$





A. M. Garcia-Garcia, E. Cuevas, Phys. Rev. B **75**, 174203 (2007).



A. M. Garcia-Garcia, E. Cuevas, Phys. Rev. B **75**, 174203 (2007).

## Сравнение с оригинальной обработкой работы

A. M. Garcia-Garcia, E. Cuevas, Phys. Rev. B **75**, 174203 (2007).

$$y = \frac{\sigma^2}{\sigma_P^2} = F \left( \frac{L^{d/4}}{\xi a^{(d-4)/4}} \right)$$

$$y = \tilde{F} \left( \tau \frac{L^{d/4\nu}}{a^{(d-4)/4\nu}} \right) = y_c + C\tau L^{d/4\nu} + \dots$$

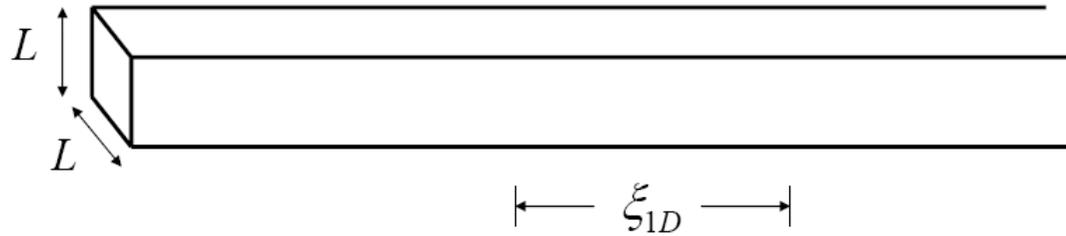
## Результаты

$$\nu = 0.84 \ (d = 5), \ \nu = 0.78 \ (d = 6)$$

заменой  $\nu \rightarrow 4\nu/d$  превращаются в

$$\nu = 0.67 \ (d = 5), \ \nu = 0.52 \ (d = 6)$$

# Высокие размерности: квазиодномерные системы

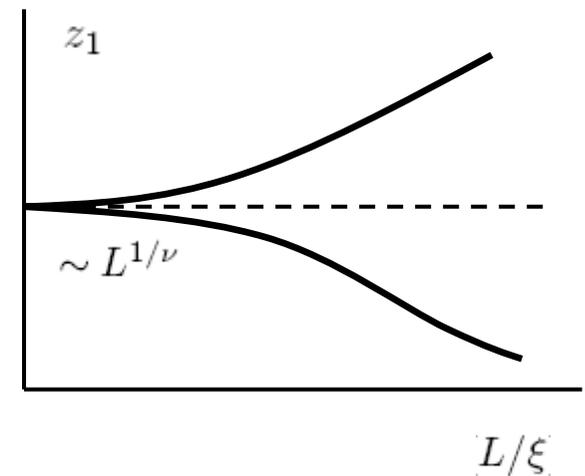
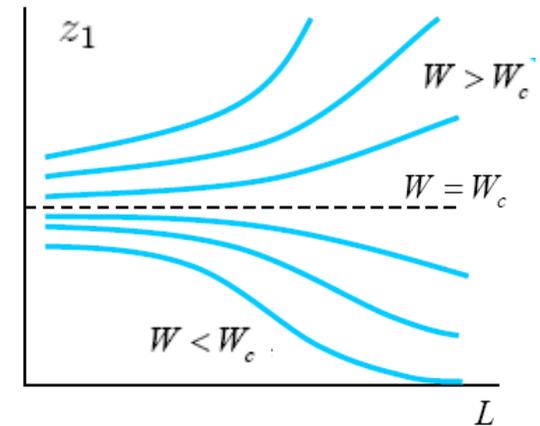


Стандартный скейлинговый параметр:

$$z_1 = L/\xi_{1D}$$

где  $\xi_{1D}$  – корреляционный радиус квазиодномерной системы.

$$z_1 = F\left(\frac{L}{\xi}\right)$$



# Модифицированный скейлинг при $d \geq 4$

Теоретическая скейлинговая функция  $y(x)$ :

$$\pm x^2 = \frac{1}{y} - y^2$$

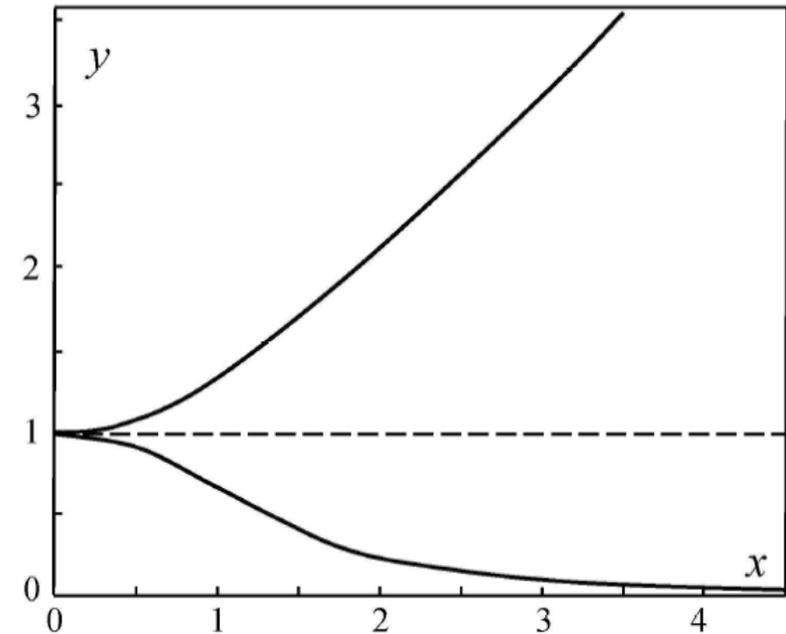
задается в переменных

$$y = \frac{L}{\xi_{1D}} \left( \frac{L}{a} \right)^{(d-4)/3}, \quad x = \frac{L}{\xi} \left( \frac{L}{a} \right)^{(d-4)/3}$$

для  $d > 4$  и

$$y = \frac{L}{\xi_{1D}} [\ln(L/a)]^{1/3}, \quad x = \frac{L}{\xi} \frac{[\ln(\xi/a)]^{1/2}}{[\ln(L/a)]^{1/6}}$$

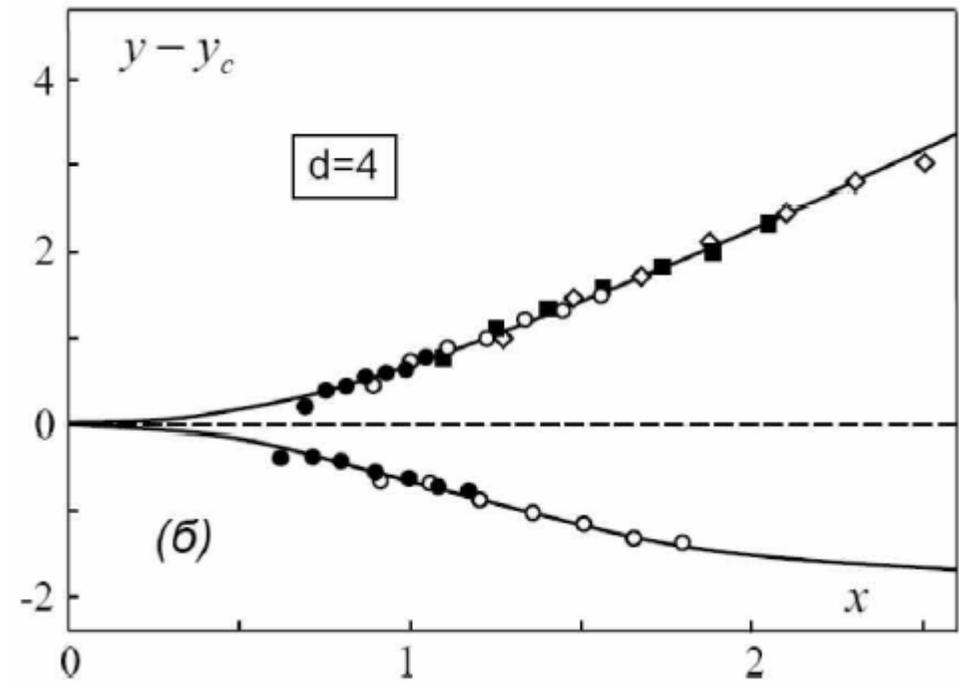
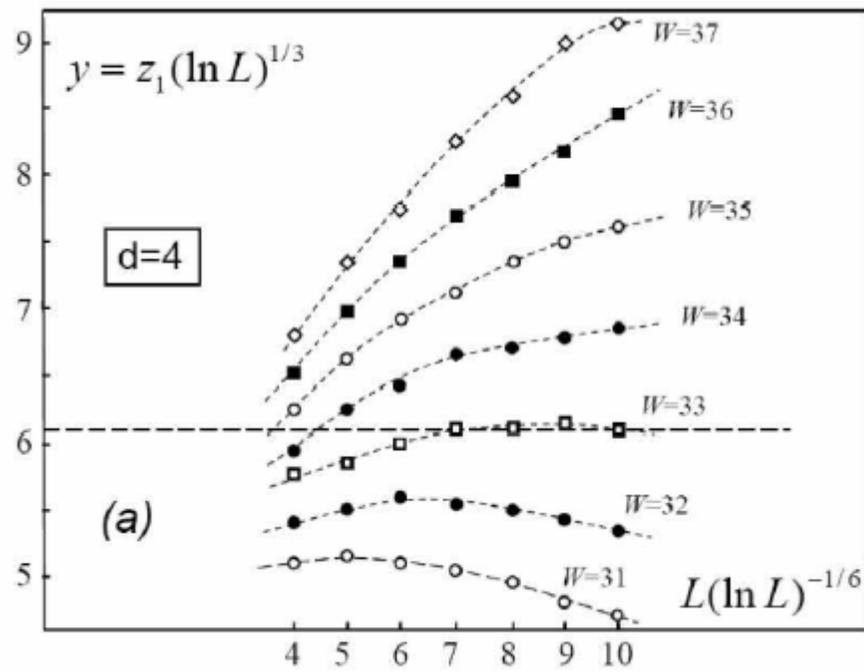
при  $d=4$ .



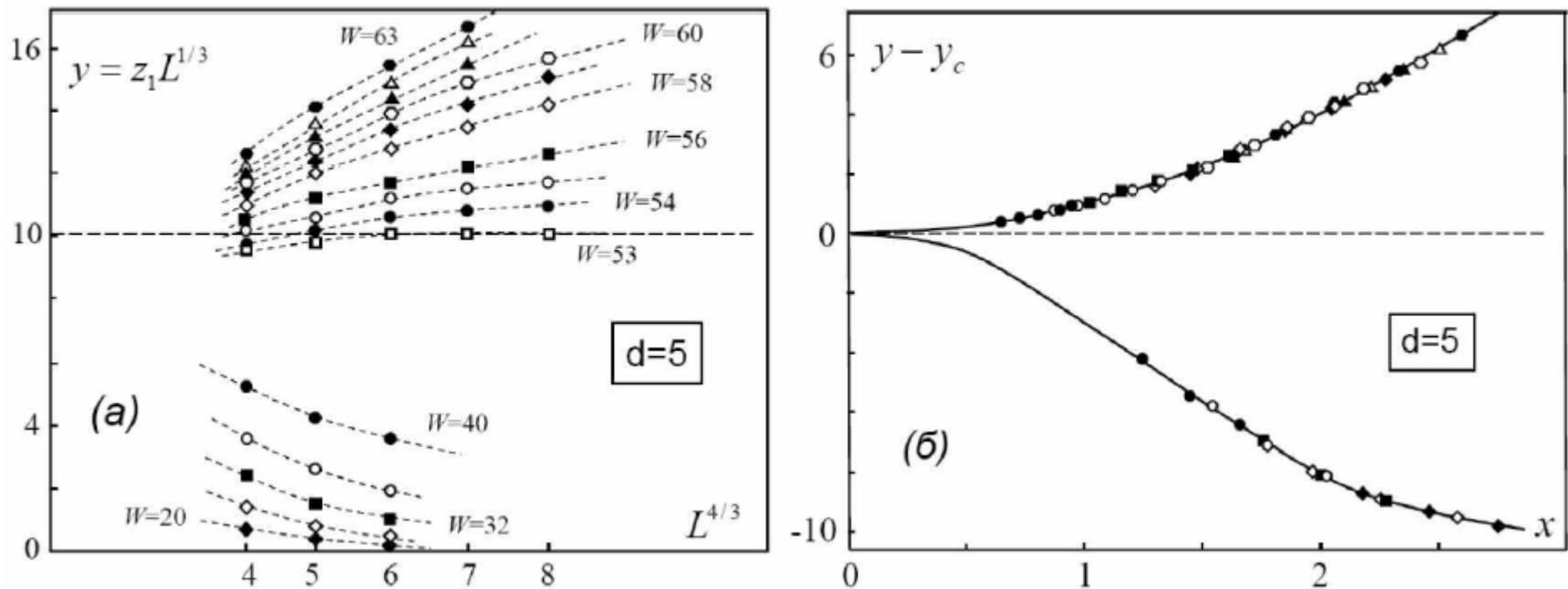
«Модифицированная длина»

$$\mu(L) = L^{(d-1)/3} \quad (d > 4)$$

$$\mu(\bar{L}) = L[\ln(L/a)]^{-1/6} \quad (d = 4)$$



Под  $y - y_c$  понимается  $y(W, L) - y(33, L)$



Под  $y - y_c$  понимается  $y(W, L) - y(53, L)$

## Comment on the paper

### I. M. Suslov: Finite Size Scaling from the Self Consistent Theory of Localization

P. Markoš

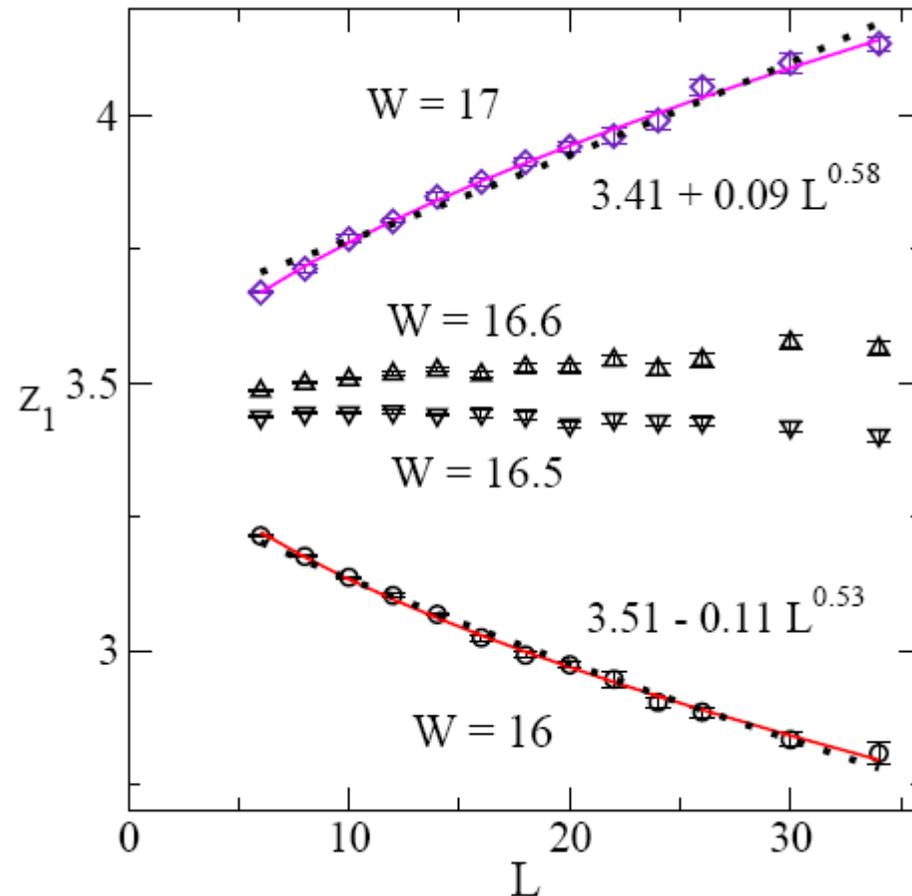
*Department of Physics FEI, Slovak University of Technology, 81219 Bratislava, Slovakia*

In the recent paper [I.M.Suslov, JETP 114 (2012) 107] a new scaling theory of electron localization was proposed. We show that numerical data for the quasi-one dimensional Anderson model do not support predictions of this theory.

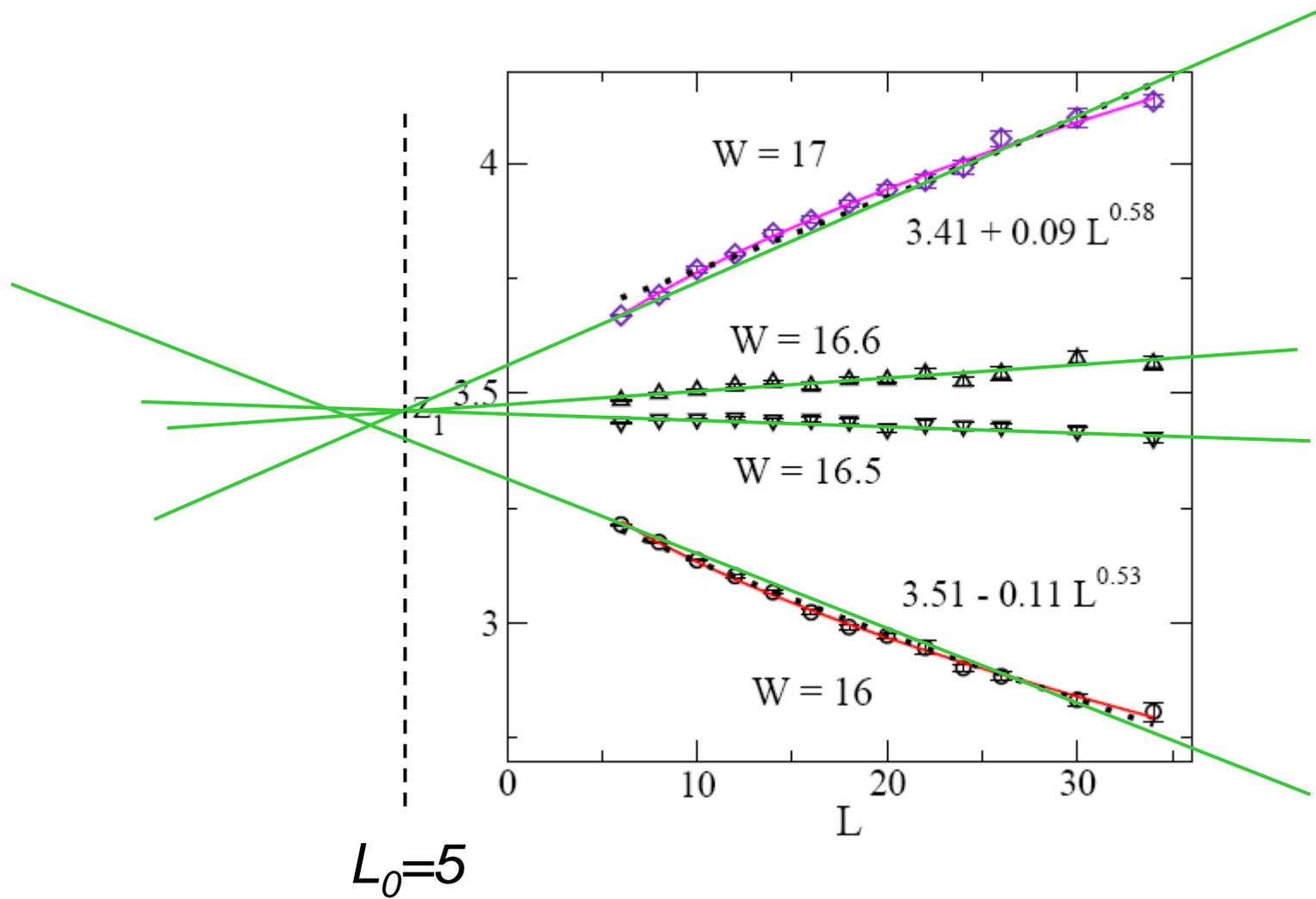
PACS numbers: 71.23.An,73.20.Fz,72.80.Vp

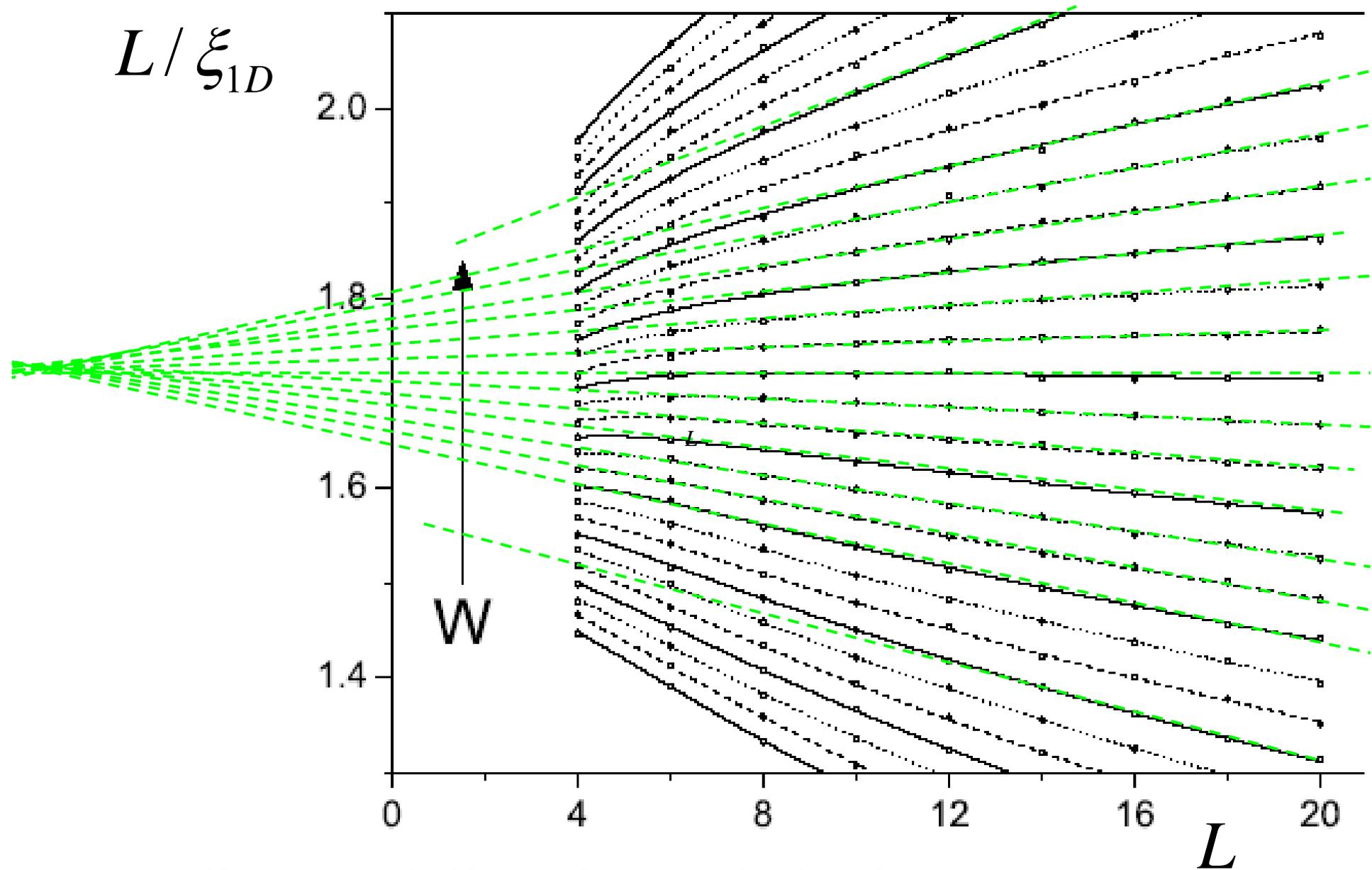
Реальный прогресс:

$L = 22 \rightarrow L = 34$



P.Markos, 2012





B. Kramer, A. MacKinnon, K. Slevin, T. Ohtsuki,  
 arXiv: 1004.0285

## Сигма-модели и $d_{c2}$

Гипотеза о том, что  $d_{c2} = \infty$ , основана на следующих аргументах:

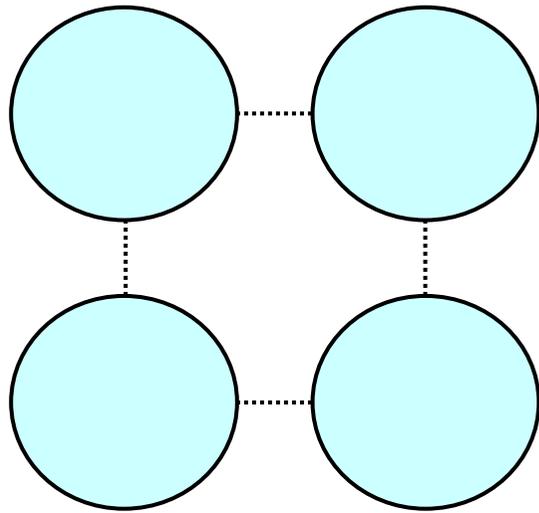
(а) В подходе, основанном на сигма-моделях, нет указаний на существование особой размерности в интервале  $2 < d < \infty$  ;

(б) Результаты  $s = \infty$ ,  $\nu = 1/2$  для  $d = \infty$  означает выполнение скейлингового соотношения  $s = \nu(d - 2)$  и можно ожидать, что это соотношение (а значит и однопараметрический скейлинг) выполняется для всех  $d$  .

Главный вопрос – о соотношении сигма-модели с исходной неупорядоченной системой.

Вывод сигма-моделей обоснован при  $d=2+\varepsilon$  .

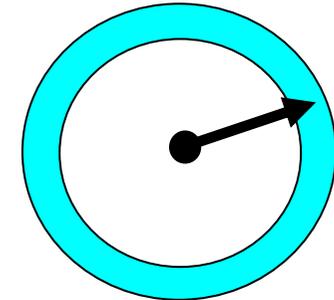
Их распространение на  $d \gg 1$  основано на искусственных конструкциях.



В каждой металлической грануле ограничиваются нулевой фурье-компонентой матричного поля  $Q$ .

При включении связи между гранулами могут возбуждаться высшие фурье-гармоники.

Векторная  $\sigma$  – модель соответствует пренебрежению продольными спиновыми флуктуациями.



Несущественность продольных флуктуаций может быть доказана для  $d < d_{c2}$ :

M. Moshe, J. Zinn-Justin, Phys.Rept. 385, 69 (2003)

При  $d \rightarrow d_{c2}$  продольные флуктуации аномально размягчаются. Их искусственное подавление может приводить к устранению  $d_{c2}$ .

